

# Lipschitz 条件とは何か：連続との違い

## 1 導入

このページの核心は、連続であることと Lipschitz 連続であることを区別し、初期値問題の一意性に必要な制御がどこにあるかを確認することである。

## 2 用語と定義

Lipschitz 条件 は、ある定数  $L \geq 0$  が存在して

$$|f(y_1) - f(y_2)| \leq L |y_1 - y_2|$$

が成立する条件である。微分方程式  $y' = f(x, y)$  では、通常  $y$  に関する Lipschitz 性を確認する。

## 3 なぜこの方針を選ぶのか

連続性は「値が急に飛ばない」ことを保証する。一方、Lipschitz 条件は「入力の差に対して出力の差が一定倍率で抑制される」ことを保証する。初期値から出発した2本の候補解が離れすぎないことを示すためには、この倍率制御が重要である。

## 4 一意性に作用する理由

同一の初期値を持つ2解  $y_1, y_2$  が存在すると仮定する。積分形で表すと、

$$y_i(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(t, y_i(t)) dt$$

である。したがって差を取ると、

$$|y_1(x) - y_2(x)| \leq \int_{x_0}^x |f(t, y_1(t)) - f(t, y_2(t))| dt$$

となる。ここで  $y$  に関する Lipschitz 条件があれば、

$$|y_1(x) - y_2(x)| \leq L \int_{x_0}^x |y_1(t) - y_2(t)| dt$$

を得る。この不等式は、差が0から出発したなら増殖できないことを示す基礎になる。厳密には Gronwall

不等式を用いて  $y_1 = y_2$  を結論する。この構造こそ、Lipschitz 条件が一意性に作用する理由である。

連続性だけでは、この差を定数倍で抑制する不等式を得られない。連続と Lipschitz 連続の違いは、値の

近接だけでなく、近接の速度を制御できるかにある。

## 5 具体例

### 5.1 Lipschitz 条件を満たす例

$f(y) = 3y + 1$  では

$$|f(y_1) - f(y_2)| = 3 |y_1 - y_2|$$

であるため、 $L = 3$  と選択できる。

### 5.2 連続だが Lipschitz でない例

$f(y) = \sqrt{|y|}$  は  $y = 0$  で連続である。しかし

$$\frac{|f(y) - f(0)|}{|y - 0|} = \frac{\sqrt{|y|}}{|y|} = \frac{1}{\sqrt{|y|}}$$

は  $y \rightarrow 0$  で発散する。したがって  $y = 0$  の近傍で 1 つの定数  $L$  により差を抑制できない。

### 5.3 $\partial f/\partial y$ の連続性との関係

$\partial f/\partial y$  が長方形領域で連続なら、その領域で有界である。このとき平均値定理から Lipschitz 条件が成立する。ただし、これは十分条件であり、必要条件ではない。

## 6 どこまで成り立つか

Lipschitz 条件は一意性を保証する標準的な条件である。しかし、Lipschitz 条件が破綻しても、必ず非一意になるわけではない。定理の仮定が不成立であることは、結論の否定を意味しない。

また、Lipschitz 条件には局所と大域の区別がある。初期値問題の局所一意性では、初期点の近傍での Lipschitz 性が中心になる。一方、全時間で解を延長できるかは、右辺の成長や爆発の有無にも依存する。したがって Lipschitz 条件は一意性の条件であり、大域存在を無条件に保証する条件ではない。

## 7 演習リンク

→ 基本演習 存在一意性と数値解法 [exercise](https://study.bem130.com/exercise/math/differential-equations/) [math](#) [differential-equations](#)  
<https://study.bem130.com/exercise/math/differential-equations/>存在一意性と数値解法-基本演習/

## 8 関連リンク

→ 講義 初期値問題の存在・一意性と Lipschitz 条件の入口 [lecture](https://study.bem130.com/lecture/math/differential-equations/) [math](#) [differential-equations](#)  
<https://study.bem130.com/lecture/math/differential-equations/>初期値問題の存在・一意性と Lipschitz 条件の入口-講義/