

Logistic 方程式 ほうていしき

1 導入 どうにゆう

このページの核心は、Logistic 方程式を単純な成長方程式ではなく、指数成長と容量制約の競合として解析することである。

2 標準形 ひょうじゆんけい

Logistic 方程式 ほうていしき は Logistic equation

$$y' = ry \left(1 - \frac{y}{K}\right)$$

である。 $r > 0$ は低密度での成長率、 $K > 0$ は環境収容力である。 y が小さい場合は $y' \approx ry$ で指数成長に近く、 y が K に近接すると成長が抑制される。

3 なぜこの方針を選ぶのか ほうしん えら

Logistic 方程式は自律系であるため、明示解の計算より前に平衡点と符号を確認する。平衡点は $y' = 0$ から $y = 0, K$ である。

4 位相線による安定性 いそうせん あんていせい

$0 < y < K$ では $y' > 0$ であるため解は増加する。 $y > K$ では $1 - y/K < 0$ であるため $y' < 0$ となり解は減少する。したがって $y = K$ は安定平衡であり、 $y = 0$ は不安定平衡である。

5 具体例 ぐたいれい

$$y' = y \left(1 - \frac{y}{10}\right)$$

では $K = 10$ である。 $y(0) = 2$ なら解は増加して 10 に接近する。 $y(0) = 15$ なら解は減少して 10 に接近する。したがって K は上限というより、長期的な安定値として理解する。

6 別の解法 べつ かいほう

この方程式は変数分離形としても処理できる。また

$$y' - ry = -\frac{r}{K}y^2$$

と整理すれば Bernoulli 方程式でもある。同じ方程式を複数の観点から扱えることが、この例の重要性である。

7 明示解の導出

平衡点と安定性を確認したうえで、明示解も導出できる。 $0 < y < K$ の範囲で

$$y' = ry \left(1 - \frac{y}{K}\right) = \frac{r}{K} y (K - y)$$

だから、

$$\frac{dy}{y(K-y)} = \frac{r}{K} dt$$

と分離できる。左辺は部分分数分解により

$$\frac{1}{y(K-y)} = \frac{1}{K} \left(\frac{1}{y} + \frac{1}{K-y} \right)$$

である。したがって

$$\int \frac{dy}{y(K-y)} = \frac{1}{K} \int \left(\frac{1}{y} + \frac{1}{K-y} \right) dy$$

となる。ここで

$$\int \frac{1}{K-y} dy = -\ln |K-y|$$

だから、

$$\frac{1}{K} \ln \left| \frac{y}{K-y} \right| = \frac{r}{K} t + C$$

を得る。両辺に K を掛け、指数化すると

$$\frac{y}{K-y} = Ae^{rt}$$

である。これを y について解くと

$$y(t) = \frac{K}{1 + Be^{-rt}}$$

を得る。ここで $B = 1/A$ であり、初期値 $y(0) = y_0$ を代入すると

$$B = \frac{K - y_0}{y_0}$$

である。したがって

$$y(t) = \frac{K}{1 + \frac{K - y_0}{y_0} e^{-rt}}$$

となる。この式からも、 $t \rightarrow \infty$ で $y(t) \rightarrow K$ となることが確認できる。

8 どこまで成り立つか

Logistic 方程式は環境収容力が一定で、成長率が密度だけに依存する単純化モデルである。季節変動、

年齢構造、空間移動を含む場合は、時間依存係数、連立系、PDE へ拡張される。

えんしゅう

9 演習リンク

→ 基本演習 変数分離形と自律系 [exercise](#) [math](#) [differential-equations](#)

<https://study.bem130.com/exercise/math/differential-equations/変数分離形と自律系-基本演習/>

かんれん

10 関連リンク

→ 講義 変数分離形と自律系 [lecture](#) [math](#) [differential-equations](#)

<https://study.bem130.com/lecture/math/differential-equations/変数分離形と自律系-講義/>

→ 講義 Bernoulli 方程式 [lecture](#) [math](#) [differential-equations](#)

<https://study.bem130.com/lecture/math/differential-equations/Bernoulli 方程式-講義/>