べき級数解法と Frobenius 法

1 導入

このページの核心は、変数係数の線型方程式で特性方程式が使えない場合に、解を 局所級数 として構成することである。

2 べき級数解法

通常点の近傍では

$$y=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$$

と仮定する。導関数は

$$y'=\sum_{n=1}^{\infty}na_nx^{n-1},\qquad y''=\sum_{n=2}^{\infty}n(n-1)a_nx^{n-2}$$

である。これを方程式へ代入し、同じ冪の係数を比較して a_n の漸化式を得る。

通常点とは、 標準形 $y''+P(x)y'+Q(x)y=0$ にしたとき、P,Q がその点の近傍で解析的である点を指す。この条件があるため、解もべき級数として構成できると期待する。級数を仮定する理由は、微分と係数比較により、未知関数を無限個の係数の決定問題へ変換できるためである。

3 Frobenius 法

Frobenius 法 は、正則特異点の近傍で

$$y=x^r\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$$

を仮定する方法である。r は指数方程式から決定される。通常のべき級数では不足する冪のずれを、x^r が 吸収 する。

正則特異点では、係数そのものは特異でも、$xP(x)$ や $x^2Q(x)$ が解析的である。この場合、解は通常のべき級数ではなく、先頭に x^r を持つ級数として表現されることが自然である。Euler-Cauchy 型はこの構造の最小例である。

4 具体例

$$y''+xy=0$$

に $y=\sum a_nx^n$ を代入すると、

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+2)(n+1)a_{n+2}x^n+\sum_{n=1}^{\infty}a_{n-1}x^n=0$$

となる。係数比較から $a_2 = 0$、および $n \geq 1$ で

$$(n+2)(n+1)a_{n+2} + a_{n-1} = 0$$

を得る。初期係数 a_0, a_1 から解が局所的に構成される。
この漸化式は、a_0 と a_1 を自由に設定すると、その後の係数が順次に決定されることを示す。二階線型の解空間が 2 次元であることが、級数係数の自由度として現れている。

5 Frobenius 法の最小例

$$x^2y'' - xy' + y = 0$$

は $x = 0$ に特異点を持つ。$y = x^r$ と置くと

$$r(r-1) - r + 1 = (r-1)^2 = 0$$

であり、重根 $r = 1$ を得る。この場合、x と $x \log x$ が基本解になる。Frobenius 法では、指数方程式の根の差や重複により、対数項が必要になる場合がある。

6 どこまで成り立つか

級数解は形式的な係数決定だけでは完了しない。収束半径、特異点、初期条件との整合性を確認する必要がある。
不規則特異点では、Frobenius 法が直接適用できない場合がある。また、級数解が得られても、閉じた初等関数として表現できるとは限らない。級数解法の目的は、初等関数へ戻すことではなく、局所的に制御された解を構成することである。

7 演習リンク

→ 基本演習 **微分方程式の入口と直接積分** exercise math differential-equations
https://study.bem130.com/exercise/math/differential-equations/微分方程式の入口と直接積分-基本演習/

8 関連リンク

→ 講義 **テイラー展開とマクローリン展開** lecture math analysis
https://study.bem130.com/lecture/math/analysis/テイラー展開とマクローリン展開-講義/