

ラプラス変換・級数・モデル化への接続

1 導入

このページの核心は、常微分方程式の学習を初等解法で閉じず、ラプラス変換・級数解法・Fourier法・物理モデル・PDEへ接続する出口戦略として整理することである。

2 役割分担

道具	使用場面	主効果
ラプラス変換	初期値と不連続入力を含む線型問題	微分を s の代数操作へ移行する
級数解法	変数係数で初等解が期待しにくい問題	係数比較で局所解を構成する
Fourier 級数	周期性や境界条件を持つ問題	固有関数展開で分解する
モデル化	物理・生物・制御の現象	仮定を方程式へ翻訳する

3 ラプラス変換の位置づけ

ラプラス変換は、初期値を抱えたまま微分方程式を代数方程式へ移行する道具である。たとえば

$$y'' + ay' + by = f(t), \quad y(0) = y_0, \quad y'(0) = v_0$$

では、微分の変換公式に初期値が組み込まれる。したがって不連続入力やインパルスを含む問題で有効である。

具体的には、 $Y(s) = \mathcal{L}\{y(t)\}$ とおくと

$$\mathcal{L}\{y'\} = sY(s) - y(0), \quad \mathcal{L}\{y''\} = s^2Y(s) - sy(0) - y'(0)$$

である。したがって初期条件は変換後の式に自然に出現する。初期値問題でラプラス変換が有効な理由は、微分を代数化するだけでなく、初期条件を別処理にしなくてよい点にある。

4 具体例：ラプラス変換が自然な問題

$$y'' + y = H(t - \pi), \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 0$$

では、右辺が時刻 π で切替る。未定係数法でも区間を分割すれば処理できるが、接続条件を追跡する必要がある。ラプラス変換では遅延因子 $e^{-\pi s}$ により、切替時刻が式の中で保持される。このため、不連続入力や衝撃入力を含む線型初期値問題ではラプラス変換が自然な候補になる。

5 級数解法の位置づけ

$$y'' + xy' + y = 0$$

のような変数係数では、特性方程式が成立しない。この場合、 $y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ と仮定し、係数比較で a_n を決定する。これは閉じた初等解が期待しにくい場合の標準手段である。

ただし級数解法は、形式的に級数を代入して終了する方法ではない。漸化式で係数を決定した後、収束半径や特異点を確認する必要がある。特異点が通常点か確定特異点かにより、通常のべき級数か Frobenius 法かを選択する。

6 方法選択の基準

状況	優先する道具	理由
定数係数・滑らかな右辺	特性方程式・未定係数法	計算が直接的である
初期値・不連続入力・デルタ 入力	ラプラス変換	初期条件と 入力切替 を 代数操作へ移行できる
変数係数・局所解	級数解法	係数比較で逐次構成できる
空間分布・境界条件	Fourier 法・PDE	固有関数で空間構造を分解できる

7 PDE とモデル化への出口

熱や波のように量が空間に分布する場合、未知関数は $u(x, t)$ となり、PDE へ進行する。常微分方程式で学習した初期条件、境界条件、固有値、Fourier 展開は PDE でも中心的に作用する。

8 どこまで成り立つか

ラプラス変換は収束条件を必要とする。級数解法は収束半径と特異点の位置に依存する。モデル化では仮定が外れると、方程式そのものの意味が変化する。

Fourier 法は周期性や境界条件と相性が良いが、非線型や不規則領域では別の解析が必要になる。変換は万能な解法ではなく、微分作用や境界条件を簡単にする座標・基底を選択する方法である。

9 演習リンク

→ [基本演習](#) [微分方程式の入口と直接積分](#) [exercise](#) [math](#) [differential-equations](#)
<https://study.bem130.com/exercise/math/differential-equations/微分方程式の入口と直接積分-基本演習/>

10 関連リンク

→ [講義](#) [ラプラス変換の入口](#) [lecture](#) [math](#) [analysis](#)
<https://study.bem130.com/lecture/math/analysis/ラプラス変換の入口-講義/>

→ [講義](#) [偏微分方程式ポータル](#) [lecture](#) [math](#) [partial-differential-equations](#)

<https://study.bem130.com/lecture/math/partial-differential-equations/偏微分方程式ポータル-講義/>