

# 一階微分方程式の分類と最初の判定

## 1 導入

このページの核心は、一階微分方程式を公式集として扱うのではなく、式の形から解法の候補を判定することである。

一階であるとは、未知関数  $y(x)$  の導関数のうち、最高階が  $y'$  であることを意味する。一階という情報だけでは解法は決定しない。 $y' = f(x)g(y)$ 、 $y' + P(x)y = Q(x)$ 、 $Mdx + Ndy = 0$  では、採用すべき方針が異なる。

## 2 何を解くページか

対象は一階の常微分方程式

$$F(x, y, y') = 0$$

である。このページでは一般形を完全に解くのではなく、初学段階で頻出する型を分類し、最初に何を確かめるべきかを固定する。

## 3 なぜこの方針を選ぶのか

微分方程式では、解法を先に暗記すると誤用が生じやすい。変数分離は  $x$  と  $y$  を因子として分離できる場合に自然である。一階線型は左辺を積の微分へ変換する方針である。完全形は全微分  $d\Phi$  を復元する方針である。

したがって最初に実行すべきことは、積分ではなく型判定である。型が判定できれば、「なぜその操作を行うのか」も説明できる。

## 4 最初の判定手順

- $y' = f(x)$  のように右辺が  $x$  だけの関数かを確認する。該当すれば直接積分が候補である。
- $y' = f(x)g(y)$  に整理できるかを確認する。該当すれば変数分離形である。
- $y' = F(y)$  なら、自律系として平衡解と符号を確認する。
- $y' + P(x)y = Q(x)$  に整理できるかを確認する。該当すれば一階線型である。
- $M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$  の形なら、完全性と領域条件を確認する。
- $y' + P(x)y = Q(x)y^n$  の形なら Bernoulli 型を検討する。

この順序は、構造が単純で変形が少ない型から確認する順序である。複雑な置換を先に試行すると、本来は単純な型を誤認し、判定から逸脱する。

## はんでいひょう

## 5 判定表

型	標準形	選択する理由
直接積分	$y' = f(x)$	導関数が $x$ だけで決定される
変数分離形	$y' = f(x)g(y)$	$x$ と $y$ の因子を分離できる
自律系	$y' = F(y)$	平衡解と安定性を先に判定できる
一階線型	$y' + P(x)y = Q(x)$	積分因子で積の微分を作成できる
完全形	$Mdx + Ndy = 0$	ポテンシャル関数 $\Phi$ を復元できる
Bernoulli 型	$y' + P(x)y = Q(x)y^n$	$u = y^{1-n}$ で線型化できる

## 6 具体例 1: 変数分離が自然な場合

$$y' = xy$$

は  $y' = f(x)g(y)$  の形であり、 $f(x) = x$ 、 $g(y) = y$  と整理できる。したがって

$$\frac{dy}{y} = x dx$$

として積分する方針が自然である。この操作は「両辺を適当に移動する」ものではなく、 $x$  側と  $y$  側の因子が分離できることを利用している。

## 7 具体例 2: 一階線型が自然な場合

$$y' + xy = 1$$

は  $y' = f(x)g(y)$  には整理しにくい。一方、

$$y' + P(x)y = Q(x)$$

と比較すると、 $P(x) = x$ 、 $Q(x) = 1$  である。したがって変数分離ではなく、積分因子により左辺を積の微分へ変換する。

## 8 誤用しやすい例

$$y' = x + y$$

は  $x$  と  $y$  が和で結合しているため、 $dy/y = dx/x$  のように分離してはならない。一階線型として

$$y' - y = x$$

に整理できるため、積分因子を用いる型である。見かけの単純さではなく、標準形への一致で判定する

必要がある。

## 9 どこまで成り立つか

このページの分類は初等解法の入口である。分類表に該当しない方程式でも、解が存在しないとは限らない。存在・一意性を定理で確認し、必要に応じて数値解法や定性的解析へ移行する。

## 10 演習リンク

→ 標準演習 微分積分の応用と発展 [exercise](#) [math](#) [calculus](#)  
<https://study.bem130.com/exercise/math/calculus/微分積分の応用と発展-標準演習/>

## 11 次に参照するページ

→ 講義 一階微分方程式の解法診断 [lecture](#) [math](#) [differential-equations](#)  
<https://study.bem130.com/lecture/math/differential-equations/一階微分方程式の解法診断-講義/>

→ 講義 変数分離形と自律系 [lecture](#) [math](#) [differential-equations](#)  
<https://study.bem130.com/lecture/math/differential-equations/変数分離形と自律系-講義/>