一階線型と積分因子

1 導入

このページの核心は、積分因子を暗記対象ではなく、左辺を積の微分へ変換するために逆算して構成することである。

2 標準形

一階線型微分方程式 (First-order linear differential equation) は

$$y' + P(x)y = Q(x)$$

である。P, Q が対象区間で連続なら、初期値問題は一意解を持つ。ただし、積分が初等関数で表現できるとは限らない。

3 なぜこの方針を選ぶのか

分離形では x と y を左右に分離する。一階線型ではそれが一般には不可能である。代わりに、左辺を

$$\frac{d}{dx}(\mu y)$$

へ変換することを目標にする。積の微分を展開すると $\mu y' + \mu' y$ である。もとの式に μ を掛けた左辺 $\mu y' + \mu P y$ と一致させるため、

$$\mu' = \mu P$$

を要求する。

4 解法の流れ

$$\frac{\mu'}{\mu} = P(x)$$

より

$$\mu(x) = e^{\int P(x)\,dx}$$

を選択する。このとき

$$\frac{d}{dx}(\mu y) = \mu Q(x)$$

であるため、

$$\mu y = \int \mu Q(x)\,dx + C$$

を得る。

5 具体例

$$y' + y = x$$

では $P(x) = 1$ であるため $\mu = e^x$ を選択する。したがって

$$\frac{d}{dx}(e^x y) = xe^x$$

であり、

$$e^x y = \int xe^x\,dx + C = (x-1)e^x + C$$

を得る。よって

$$y = x - 1 + Ce^{-x}$$

である。

6 分離形との比較

項目	変数分離形	一階線型
標準形	$y' = f(x)g(y)$	$y' + P(x)y = Q(x)$
狙う変形	$dy/g(y) = f(x)dx$	$d(\mu y)/dx = \mu Q$
主役	変数の分離	積の微分

7 応用例

RC 回路の電圧 $V(t)$ は

$$V' + \frac{1}{RC}V = \frac{1}{RC}E(t)$$

の形で表現される。左辺は現在の電圧が緩和する効果、右辺は入力電圧を表す。単位は $1/(RC)$ が $[\mathrm{s}^{-1}]$ であり、V' と $V/(RC)$ はどちらも [V/s] で一致する。

8 どこまで成り立つか

この方法は線型であることに依存する。$y' + P(x)y = Q(x)y^2$ のような非線型はそのままでは一階線型ではない。ただし Bernoulli 型なら置換で一階線型へ還元できる場合がある。

9 演習リンク

→ 基本演習 一階線型と積分因子 exercise math differential-equations
https://study.bem130.com/exercise/math/differential-equations/一階線型と積分因子-基本演習/

10 関連(かんれん)リンク

→ 講義 **Bernoulli 方程式** lecture math differential-equations
https://study.bem130.com/lecture/math/differential-equations/Bernoulli 方程式-講義/