

一階連立系と行列指数関数

1 導入

このページの核心は、連立線型微分方程式 $x' = Ax$ を、行列による状態の時間発展として理解することである。

2 標準形

対象は

$$x' = Ax, \quad x(0) = x_0$$

である。ここで A は定数行列である。

行列指数関数は

$$e^{At} = I + At + \frac{(At)^2}{2!} + \frac{(At)^3}{3!} + \dots$$

で定義される。この級数は正方行列に対して意味を持つ。

3 なぜこの方針を選ぶのか

一次元の $x' = \lambda x$ の解は $x(t) = e^{\lambda t} x(0)$ である。行列系では、状態の各成分が相互作用するため、数 λ の代わりに行列 A を用いる。したがって時間発展は e^{At} で表現される。

この方針の利点は、解を成分ごとに個別に追跡するのではなく、状態空間の 1 点が行列により連続的に移動する問題として扱える点にある。とくに固有値は増減の速さを、固有ベクトルは増減が起こる方向を表す。

4 厳密な説明

$$x(t) = e^{At} x_0$$

とおく。行列指数関数は $\frac{d}{dt} e^{At} = A e^{At}$ を満たすため、

$$x'(t) = A e^{At} x_0 = Ax(t)$$

となる。さらに $e^{A0} = I$ であるため、初期条件も満たす。

5 対角化できる場合

$A = PDP^{-1}$ と対角化できるなら、

$$e^{At} = P e^{Dt} P^{-1}$$

である。 $D = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ なら $e^{Dt} = \text{diag}(e^{\lambda_1 t}, \dots, e^{\lambda_n t})$ である。固有方向ごとに独立した指数成長や減衰へ分解できる。

6 具体例 1: 対角行列の場合

$$\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \mathbf{x}, \quad \mathbf{x}(0) = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

を考える。この場合は成分が相互作用しないため、

$$x_{(1)'} = x_1, \quad x_{(2)'} = -2x_2$$

である。したがって

$$e^{At} = \begin{pmatrix} e^t & 0 \\ 0 & e^{-2t} \end{pmatrix}$$

となり、

$$\mathbf{x}(t) = \begin{pmatrix} 3e^t \\ 4e^{-2t} \end{pmatrix}$$

を得る。第一成分は指数成長し、第二成分は指数減衰する。この例は、固有値の符号が時間発展を直接支配することを示す。

7 具体例 2: 回転を表す場合

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -\omega \\ \omega & 0 \end{pmatrix}$$

では、

$$e^{At} = \begin{pmatrix} \cos \omega t & -\sin \omega t \\ \sin \omega t & \cos \omega t \end{pmatrix}$$

となる。したがって初期状態 \mathbf{x}_0 は、長さを保ったまま角速度 ω で回転する。

この例では固有値が $\pm i\omega$ であり、実部が 0 である。指数的な増減はなく、虚部が周期運動を生成する。こ

の観点が相平面と安定性の分類へ接続する。

→ 講義 相平面と安定性 [lecture](#) [math](#) [differential-equations](#)

<https://study.bem130.com/lecture/math/differential-equations/相平面と安定性-講義/>

8 二階方程式を一階連立へ還元する

$$y'' + ay' + by = 0$$

に対して、 $x_1 = y$, $x_2 = y'$ と置くと

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -b & -a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

である。したがって高階線型方程式も一階連立系として統一できる。この変換により、固有値と安定性の議論が利用できる。

例として $y'' + 3y' + 2y = 0$ では、

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{pmatrix}$$

となる。この行列の固有値は $-1, -2$ であるため、対応する二階方程式の解は e^{-t} と e^{-2t} の線型結合で表現される。これは特性方程式で得る結果と一致する。一階連立系への還元は、二階方程式の解法を線型代数の言語に翻訳する操作である。

9 注意

$$\mathbf{x}' = A(t)\mathbf{x}$$

のように係数行列が t に依存する場合、単純に $e^{\int A(t) dt}$ と表記できるとは限らない。異なる時刻の行列が可換でない場合があるからである。この場合は基本解行列や時間順序を含む議論が必要になる。

10 どこまで成り立つか

このページの公式 $\mathbf{x}(t) = e^{At}\mathbf{x}_0$ は、 A が定数行列である同次線型系に対する基本形である。非同次系

$$\mathbf{x}' = A\mathbf{x} + \mathbf{b}(t)$$

では、同次解だけでは不十分であり、

$$\mathbf{x}(t) = e^{At}\mathbf{x}_0 + \int_0^t e^{A(t-s)}\mathbf{b}(s) ds$$

のような畳み込み型の項が現れる。また、非線型系では行列指数関数だけで全体を解決することはできない。ただし平衡点の近傍では Jacobian による線型化を通じて、このページの理論が局所解析に作用する。

→ [講義 線型化と固有値判定の入口](#) [lecture](#) [math](#) [differential-equations](#)
<https://study.bem130.com/lecture/math/differential-equations/線型化と固有値判定の入口-講義/>

11 演習リンク

→ [基本演習 連立系と安定性](#) [exercise](#) [math](#) [differential-equations](#)
<https://study.bem130.com/exercise/math/differential-equations/連立系と安定性-基本演習/>

12 関連リンク

→ [講義 線型化と固有値判定の入口](#) [lecture](#) [math](#) [differential-equations](#)
<https://study.bem130.com/lecture/math/differential-equations/線型化と固有値判定の入口-講義/>

→ [講義 対角化の基本](#) [lecture](#) [math](#) [linear-algebra](#)
<https://study.bem130.com/lecture/math/linear-algebra/対角化の基本-講義/>

→ [講義](#) **対角化・Jordan 形と連立系** [lecture](#) [math](#) [differential-equations](#)

<https://study.bem130.com/lecture/math/differential-equations/対角化・Jordan形と連立系-講義/>