二階線型定数係数微分方程式の基本

1 導入

このページの核心は、二階線型のうち係数が定数である場合に限定し、特性方程式が自然に成立する理由を確認することである。

このページでは $ay'' + by' + cy = f(x)$ のうち、a, b, c が定数である場合を扱う。 一般の二階線型 $y'' + P(x)y' + Q(x)y = R(x)$ は別の概観ページで扱う。

→ 講義 一般の二階線型微分方程式の見取り図 lecture math differential-equations
https://study.bem130.com/lecture/math/differential-equations/一般の二階線型微分方程式の見取り図-講義/

2 何を解くページか

同次の標準形は

$$ay'' + by' + cy = 0, \qquad a \neq 0$$

である。非同次の場合は $ay'' + by' + cy = f(x)$ であり、同次解と特解に分解して扱う。

3 なぜこの方針を選ぶのか

定数係数では、e^{rx} を微分しても re^{rx}、r^2e^{rx} となり、同じ関数 e^{rx} が因子として残る。したがって微分方程式が r の代数方程式へ変換される。この性質は係数が定数であることに依存する。

4 厳密な導出

$y = e^{rx}$ と仮定すると

$$y' = re^{rx}, \qquad y'' = r^2e^{rx}$$

である。これを $ay'' + by' + cy = 0$ に代入すると

$$(ar^2 + br + c)e^{rx} = 0$$

である。$e^{rx} \neq 0$ より

$$ar^2 + br + c = 0$$

を得る。これが特性方程式 (Characteristic equation) である。

5 根の場合分け

特性根	基本解	理由
相異なる実根 r_1, r_2	e^{r_1x}, e^{r_2x}	独立な 2 解が得られる
重根 r	e^{rx}, xe^{rx}	解空間の次元 2 を回復する

複素根 $\alpha \pm i\beta$	$e^{\alpha x}\cos\beta x,\ e^{\alpha x}\sin\beta x$	Euler 公式で実数解へ変換する

6 具体例

$$y'' - 3y' + 2y = 0$$

では特性方程式は $r^2 - 3r + 2 = 0$ である。$(r-1)(r-2) = 0$ より $r = 1, 2$ を得る。したがって

$$y = C_1 e^x + C_2 e^{2x}$$

である。

重根の例として

$$y'' - 2y' + y = 0$$

では $(r-1)^2 = 0$ である。独立な 2 解を構成するため、

$$y = (C_1 + C_2 x)e^x$$

となる。

複素根の例として

$$y'' + 4y = 0$$

を考察する。特性方程式は $r^2 + 4 = 0$ であり、$r = \pm 2i$ を得る。複素指数関数では e^{2ix}, e^{-2ix} が解であるが、実係数の方程式では Euler 公式により

$$y = C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x$$

と表現できる。複素根は失敗ではなく、振動解が出現する信号である。

7 非同次への接続

$$ay'' + by' + cy = f(x)$$

では、まず対応する同次方程式 $ay'' + by' + cy = 0$ の一般解 y_h を求める。そのうえで $L[y_p] = f(x)$ を満たす特解 y_p を 1 つ構成し、$y = y_h + y_p$ と合成する。未定係数法や定数変化法は、この特解構成を担当する別の方法である。

→ 講義 **非同次方程式と未定係数法** lecture math differential-equations
https://study.bem130.com/lecture/math/differential-equations/非同次方程式と未定係数法-講義/

8 どこまで成り立つか

特性方程式法は定数係数の線型方程式に強く依存する。$y'' + xy' + y = 0$ のような変数係数では、e^{rx} を代入しても代数方程式へ還元できない。級数解法や特殊関数が必要になることがある。

9 演習リンク

→ 標準演習 **微分積分の応用と発展** exercise math calculus
https://study.bem130.com/exercise/math/calculus/微分積分の応用と発展-標準演習/

10 次に参照するページ

→ 講義 **二階線型微分方程式の拡張** lecture math differential-equations
https://study.bem130.com/lecture/math/differential-equations/二階線型微分方程式の拡張-講義/