二階線型微分方程式の拡張

1 導入

このページの核心は、定数係数の二階線型方程式について、特性根の種類と非同次項の扱いを統一して整理することである。

2 位置づけ

このページは定数係数での洗練を扱う。一般の変数係数を含む二階線型理論は概観ページで確認する。

→ 講義 一般の二階線型微分方程式の見取り図 lecture math differential-equations
https://study.bem130.com/lecture/math/differential-equations/一般の二階線型微分方程式の見取り図-講義/

3 同次解の整理

$$ay'' + by' + cy = 0$$

の特性方程式は $ar^2 + br + c = 0$ である。根が $\alpha \pm i\beta$ なら、実数解は

$$y = e^{\alpha x}(C_1 \cos \beta x + C_2 \sin \beta x)$$

である。重根 r なら、解空間の次元を 2 に保つため e^{rx} と xe^{rx} を使用する。

4 非同次の整理

$$L[y] = f(x)$$

では、線型性により

$$y = y_h + y_p$$

と分解する。y_h は同次方程式の一般解であり、y_p は特解である。右辺が多項式・指数関数・三角関数の有限結合なら未定係数法が候補になる。一般的な右辺なら定数変化法を検討する。

5 具体例

$$y'' + 2y' + 5y = 0$$

の特性根は $-1 \pm 2i$ である。したがって

$$y = e^{-x}(C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x)$$

である。

$$y'' + y = \cos x$$

では右辺 $\cos x$ が同次解と重複する。この場合、特解の候補に x を掛け、線型独立性を回復する。

6 どこまで成り立つか

複素根・重根・未定係数法の整理は、定数係数の枠内で機能する。変数係数では級数解法や特殊関数に進む必要がある。

7 演習リンク

→ 基本演習 二階線型定数係数方程式 exercise math differential-equations
https://study.bem130.com/exercise/math/differential-equations/二階線型定数係数方程式-基本演習/

→ 基本演習 二階線型微分方程式 exercise math differential-equations
https://study.bem130.com/exercise/math/differential-equations/二階線型微分方程式-基本演習/

8 関連リンク

→ 講義 非同次方程式と未定係数法 lecture math differential-equations
https://study.bem130.com/lecture/math/differential-equations/非同次方程式と未定係数法-講義/

→ 講義 定数変化法と Wronskian lecture math differential-equations
https://study.bem130.com/lecture/math/differential-equations/定数変化法と Wronskian-講義/