

初期値問題と境界値問題

1 導入

このページの核心は、微分方程式では方程式だけでなく、条件をどこに配置するかが問題の性質を決定することである。

2 何を解くページか

初期値問題は、ある基準点で $y(x_0) = y_0$ や $y'(x_0) = v_0$ を指定し、そこから解を発展させる問題である。境界値問題は、区間の端点や領域の境界で $y(a) = \alpha, y(b) = \beta$ のような条件を指定する問題である。

3 なぜこの方針を選ぶのか

初期値問題は時間発展に自然である。現在の状態から将来を決定する構造を持つからである。一方、境界値問題は釣合、定常状態、空間分布に自然である。両端や境界が全体の形状を拘束するからである。

4 直感的な説明

初期値問題は「出発点から曲線を延長する」問題である。境界値問題は「両端を固定して、その間に曲線を通す」問題である。同一の方程式でも、条件の置き方が変化すると、解の存在や個数が変化する。

5 具体例

5.1 初期値問題

$$y' = -y, \quad y(0) = 1$$

では、解は $y = e^{-x}$ である。出発値 $y(0) = 1$ が減衰曲線を 1 本に決定する。

5.2 境界値問題

$$y'' = 0, \quad y(0) = 0, \quad y(1) = 1$$

では、一般解 $y = Ax + B$ に境界条件を代入して $B = 0, A = 1$ を得る。したがって $y = x$ である。

5.3 同じ方程式で性質が変化する例

$$y'' + \lambda y = 0, \quad y(0) = 0, \quad y(\pi) = 0$$

では、境界値問題として考察すると $\lambda = 1, 4, 9, \dots$ のような特別な値で非零解が存在する。これは固有値問題であり、初期値問題とは別種の構造である。

6 判別基準

- 時間の開始時刻に状態が与えられるなら初期値問題である。
- 空間の端や領域の境界に条件が与えられるなら境界値問題である。
- 条件の本数だけでなく、条件の位置と方程式の型を同時に確認する。

7 どこまで成り立つか

初期値問題では、連続性や Lipschitz 条件のもとで局所的な存在・一意性が保証されることが多い。

境界値問題では、解が存在しない、複数存在する、または固有値の選択を要求する場合がある。

8 次に参照するページ

→ [講義](#) 初期値問題の存在・一意性と Lipschitz 条件の入口 [lecture](#) [math](#) [differential-equations](#)
<https://study.bem130.com/lecture/math/differential-equations/初期値問題の存在・一意性と Lipschitz 条件の入口-講義/>

9 演習リンク

→ [基本演習](#) 存在一意性と数値解法 [exercise](#) [math](#) [differential-equations](#)
<https://study.bem130.com/exercise/math/differential-equations/存在一意性と数値解法-基本演習/>