初期値問題の存在・一意性と Lipschitz 条件の入口

1 導入

このページの核心は、初期値問題で「解が存在すること」と「解が 1 本に決定されること」を分離して理解することである。

2 何を解くページか

標準形は

$$y' = f(x, y), \qquad y(x_0) = y_0$$

である。ここで問題にするのは、解の公式ではなく、初期点 (x_0, y_0) の近傍で解が存在するか、さらに一意に決定されるかである。

3 なぜこの方針を選ぶのか

解析解が得られなくても、解の存在や一意性は判定できる。存在には右辺 f の連続性が基本になる。一方、一意性には y 方向への局所 Lipschitz 性が本質である。$\partial f/\partial y$ の連続性は、その確認を容易にする十分条件であり、必要条件ではない。

→ 講義 Lipschitz 条件とは何か：連続との違い lecture math differential-equations
https://study.bem130.com/lecture/math/differential-equations/Lipschitz 条件とは何か：連続との違い-講義/

4 定理の形

Peano の存在定理の入口として、f が初期点を含む長方形領域で連続なら、少なくとも短い区間で局所解が存在する。

Picard-Lindelof の定理の入口として、f が連続であり、さらに y に関して局所 Lipschitz 条件を満たすなら、初期点の近傍で解は一意に存在する。

この関係は、次の二段構成で整理できる。

$$f \text{ が連続} \Longrightarrow \text{局所解の存在}$$

$$f \text{ が連続かつ } y \text{ について局所 Lipschitz} \Longrightarrow \text{局所解の一意性}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} \text{ が連続} \Longrightarrow y \text{ について局所 Lipschitz}$$

5 Lipschitz 条件が一意性に作用する理由

同一の初期条件を満たす 2 解 y_1, y_2 が存在すると仮定する。どちらも微分方程式を満たすため、積分形では

$$y_i(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, y_i(t))\,dt \qquad (i = 1, 2)$$

である。差を取ると、

$$|\,y_1(x) - y_2(x)| \le \int_{x_0}^{x} |\,f(t, y_1(t)) - f(t, y_2(t))|\,dt$$

を得る。f が y について Lipschitz 条件を満たし、定数を L とすると、

$$|\,y_1(x) - y_2(x)| \le L \int_{x_0}^{x} |\,y_1(t) - y_2(t)|\,dt$$

となる。右辺は解どうしの差そのものを積分した量で抑えられる。同一の初期値では最初の差が 0 であるため、Gronwall 型の評価により差は 0 に固定される。Lipschitz 条件は、近接した 2 解が別方向へ分岐することを抑制する条件である。

この説明から、$\partial f/\partial y$ の連続性が必要条件ではないことも確認できる。本質は差を $L\,|\,y_1 - y_2|$ で制御できることであり、偏導関数の連続性はその制御を容易に確認する十分条件である。

6 判定表

状況	結論	注意
f が連続	局所解の存在	一意性までは保証しない
f が連続かつ y について局所 Lipschitz	局所一意解の存在	最大存在区間は別途確認する
$\partial f/\partial y$ が連続	Lipschitz 条件を確認しやすい	十分条件であり、必要条件ではない
Lipschitz 条件が不成立	定理の仮定が使えない	非一意が必ず発生するわけではない

7 具体例

7.1 一意に存在する例

$$y' = y, \qquad y(0) = 1$$

では $f(x, y) = y$ であり、$\partial f/\partial y = 1$ は連続である。したがって局所的に一意解が存在する。実際、解は $y = e^x$ である。

7.2 一意性が破綻する例

$$y' = \sqrt{|\,y\,|}, \qquad y(0) = 0$$

では $f(y) = \sqrt{|\ y\ |}$ は連続であるため、解の存在は期待できる。しかし $y = 0$ の近傍で Lipschitz 条件が成立しない。実際、$y(x) = 0$ は解であり、任意の $a \geq 0$ に対して

$$y(x) = \begin{cases} 0 & 0 \leq x \leq a, \\ \dfrac{(x-a)^2}{4} & x > a \end{cases}$$

も解になる。同一の初期条件から複数の解が出現するため、一意性は成立しない。

7.3 最大存在区間が有限で終わる例

$$y' = y^2, \qquad y(0) = 1$$

では分離により

$$y = \frac{1}{1-x}$$

を得る。この解は $x = 1$ で発散する。したがって初期点の近傍では一意解が存在しても、全実数で存在するとは限らない。

8 誤用しやすい点

- $\partial f/\partial y$ の連続性を必要条件として扱ってはならない。
- 解が存在することと、初等関数で表現できることを混同してはならない。
- 局所解の存在と大域解の存在を混同してはならない。

9 どこまで成り立つか

ここで扱った定理は一階初期値問題の局所理論である。境界値問題や偏微分方程式では、別の条件と理論が必要になる。

10 次に参照するページ

→ 講義 方向場・Euler 法・誤差と安定性の入口 lecture math differential-equations
https://study.bem130.com/lecture/math/differential-equations/方向場・Euler 法・誤差と安定性の入口-講義/

11 演習リンク

→ 基本演習 存在一意性と数値解法 exercise math differential-equations
https://study.bem130.com/exercise/math/differential-equations/存在一意性と数値解法-基本演習/