

同次形と置換

1 導入

このページの核心は、一階方程式の同次形を、比 y/x を新たな未知関数にする置換で変数分離形へ変換することである。

2 標準形

同次形 は
Homogeneous first-order equation

$$y' = F\left(\frac{y}{x}\right)$$

に整理できる一階方程式である。ここでの同次は二階線型の「右辺が0」という同次とは別の用法である。

3 なぜこの方針を選ぶのか

右辺が y/x だけに依存するなら、絶対的な位置ではなく比が本質である。したがって

$$v = \frac{y}{x}, \quad y = vx$$

と置換する。このとき

$$y' = v + xv'$$

であるため、元の方程式は v と x の方程式へ変換される。

4 具体例

$$y' = 1 + \frac{y}{x}$$

では、 $v = y/x$ とおくと

$$v + xv' = 1 + v$$

である。したがって $xv' = 1$ 、すなわち

$$v' = \frac{1}{x}$$

を得る。積分により $v = \log|x| + C$ であるため、

$$y = x(\log|x| + C)$$

である。

5 失敗例

$$y' = x + y$$

は y/x の関数だけでは表現できない。したがって $v = y/x$ の置換は自然ではない。同次形かどうかは、式を $F(y/x)$ に整理できるかで判定する。

6 どこまで成り立つか

この方法は $x = 0$ を含まない区間で扱う。 y/x が定義できない点を含めると、置換の前提が破綻する。

7 演習リンク

→ [基本演習](#) [一階微分方程式の分類と解法](#) [exercise](#) [math](#) [differential-equations](#)
<https://study.bem130.com/exercise/math/differential-equations/一階微分方程式の分類と解法-基本演習/>

8 関連リンク

→ [講義](#) [一階微分方程式の解法診断](#) [lecture](#) [math](#) [differential-equations](#)
<https://study.bem130.com/lecture/math/differential-equations/一階微分方程式の解法診断-講義/>