変数分離形と自律系

1 導入

このページの核心は、変数分離形では式を積分可能な形へ分解し、自律系では平衡点と符号から挙動を判定することである。

2 標準形

変数分離形 Separable equation は

$$\frac{dy}{dx} = f(x)g(y)$$

に整理できる一階方程式である。

自律方程式 Autonomous equation は

$$\frac{dy}{dx} = F(y)$$

のように右辺が独立変数を明示的に含まない方程式である。

3 なぜこの方針を選ぶのか

変数分離では、微分記号を利用して y に関する因子と x に関する因子を分離し、両辺を積分する。自律系では、時間や x が明示的に入らないため、状態 y の値だけで増減が決定される。したがって平衡点と符号表が先行する。

4 厳密な説明

$g(y) \neq 0$ の範囲では、

$$\frac{1}{g(y)}\,dy = f(x)\,dx$$

と整理し、

$$\int \frac{1}{g(y)}\,dy = \int f(x)\,dx + C$$

を得る。ただし、この処理では $g(y) = 0$ の定数解を除外する危険があるため、除算の前に平衡解を確認する。

5 具体例

$$y' = xy$$

では $dy/y = x\,dx$ と整理できる。$y \neq 0$ として積分すると

$$\log|\ y\ | = \frac{x^2}{2} + C$$

であり、$y = Ce^{x^2/2}$ を得る。$y = 0$ も定数解であり、$C = 0$ に含まれる。

$$y' = y(1 - y)$$

は自律系である。平衡点は $y = 0, 1$ である。$0 < y < 1$ では $y' > 0$、$y > 1$ では $y' < 0$ となるため、$y = 1$ は安定、$y = 0$ は不安定である。

6 失敗例

$$y' = x + y$$

は x と y の和であり、$f(x)g(y)$ の積ではない。したがって変数分離として処理してはならない。この方程式は $y' - y = x$ と整理して一階線型として扱う。

7 どこまで成り立つか

変数分離形は強力だが、分離できる型に限定される。自律系の符号解析は挙動を把握する方法であり、厳密な解表示を常に与えるわけではない。

8 演習リンク

→ 基本演習 変数分離形と自律系 exercise math differential-equations
https://study.bem130.com/exercise/math/differential-equations/変数分離形と自律系-基本演習/

9 関連リンク

→ 講義 Logistic 方程式 lecture math differential-equations
https://study.bem130.com/lecture/math/differential-equations/Logistic 方程式-講義/