

# 完全微分方程式

## 1 導入

このページの核心は、 $M(x, y) dx + N(x, y) dy = 0$  を未知のポテンシャル関数  $\Phi(x, y)$  の全微分  $d\Phi$  として復元することである。

## 2 標準形

完全微分方程式は  
Exact differential equation

$$M(x, y) dx + N(x, y) dy = 0$$

が

$$d\Phi = \Phi_x dx + \Phi_y dy$$

と表現できる場合の方程式である。このとき  $M = \Phi_x$ ,  $N = \Phi_y$  であり、解は  $\Phi(x, y) = C$  である。

## 3 なぜこの方針を選ぶのか

もし  $Mdx + Ndy = d\Phi$  なら、方程式は  $d\Phi = 0$  となる。これは曲線に沿って  $\Phi$  が一定であることを意味する。したがって微分方程式をポテンシャルの等位曲線へ変換できる。

## 4 完全性の判定

$M, N$  が滑らかで、対象領域が単連結なら、

$$M_y = N_x$$

により完全性を判定できる。単連結でない領域では、この局所条件だけで大域的なポテンシャルの存在を保証できない。

## 5 具体例

$$(2xy + 1) dx + x^2 dy = 0$$

では  $M = 2xy + 1$ ,  $N = x^2$  である。 $M_y = 2x$ ,  $N_x = 2x$  より完全性が成立する。

$\Phi_x = 2xy + 1$  から  $x$  で積分して

$$\Phi = x^2y + x + h(y)$$

を得る。ここで  $h(y)$  を加える理由は、 $x$  で偏微分すると消去される任意関数が残りうるからである。さらに  $\Phi_y = x^2 + h'(y)$  が  $N = x^2$  と一致するため、 $h'(y) = 0$  である。したがって解は

$$x^2y + x = C$$

である。

## 6 完全でないが近い例

$$(2y) dx + x dy = 0$$

では  $M_y = 2$ ,  $N_x = 1$  であり完全ではない。このような場合でも、積分因子を掛けることで完全化できる場合がある。ただし積分因子の探索は一般には単純ではない。

## 7 どこまで成り立つか

$M_y = N_x$  は局所的な閉性を表す。穴のある領域では、閉じていても大域的に完全でない場合がある。この現象は保存場や de Rham cohomology へ接続する。

## 8 演習リンク

→ [基本演習](#) [一階微分方程式の分類と解法](#) [exercise](#) [math](#) [differential-equations](#)  
<https://study.bem130.com/exercise/math/differential-equations/一階微分方程式の分類と解法-基本演習/>

## 9 関連リンク

→ [講義](#) [線積分と保存場](#) [lecture](#) [math](#) [vector-calculus](#)  
<https://study.bem130.com/lecture/math/vector-calculus/線積分と保存場-講義/>