対角化・Jordan 形と連立系

1 導入

このページの核心は、$\boldsymbol{x}' = A\boldsymbol{x}$ を基底変換により独立な指数関数へ分解し、対角化不能な場合には Jordan 形で多項式因子を管理することである。

2 対角化可能な場合

$A = PDP^{-1}$ なら

$$e^{At} = Pe^{Dt}P^{-1}$$

である。D が対角行列であるため、各固有方向は $e^{\lambda t}$ により時間発展する。これは連立系を独立な 1 次方程式へ分解することに対応する。

この変形の意味は、状態 $\boldsymbol{x}$ を固有基底で表現しなおすことである。$\boldsymbol{x} = P\boldsymbol{z}$ とおくと、

$$P\boldsymbol{z}' = AP\boldsymbol{z}$$

であり、$P^{-1}AP = D$ より

$$\boldsymbol{z}' = D\boldsymbol{z}$$

を得る。つまり対角化は、方程式を成分ごとに独立な $z_{(i)'} = \lambda_i z_i$ へ分解する基底変換である。

3 Jordan 形の場合

対角化不可能な場合でも、Jordan 標準形 を用いれば時間発展を記述できる。たとえば

$$J = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} = \lambda I + N, \qquad N^2 = 0$$

なら

$$e^{Jt} = e^{\lambda t}e^{Nt} = e^{\lambda t}(I + tN)$$

である。したがって解には $te^{\lambda t}$ のような多項式因子が伴う。

4 具体例

まず対角化可能な例として

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

を考える。この場合はすでに対角行列であるため、

$$\boldsymbol{x}(t) = \begin{pmatrix} e^{2t} & 0 \\ 0 & e^{-t} \end{pmatrix}\boldsymbol{x}(0)$$

である。第 1 成分は指数増加し、第 2 成分は指数減衰する。固有値の符号が時間発展を直接決定している。

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

では

$$e^{At} = e^t \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

である。第 2 成分が第 1 成分へ多項式的に影響する。

この Jordan 例では、固有値は 1 個だけだが、独立な固有方向が 2 本そろわない。その不足が te^t の多項式因子として時間発展に現れる。

5 どこまで成り立つか

Jordan 形は理論的な分類として重要である。一方、数値計算では Jordan 形は不安定になりやすく、Schur 分解などが使用されることが多い。このページでは理論的構造に焦点を置く。

また、A が時間に依存する $\boldsymbol{x}' = A(t)\boldsymbol{x}$ では、一般に $e^{\int A(t)\,dt}$ と単純に表現できない。異なる時刻の行列が可換とは限らないためである。このページの議論は定数行列 A を前提にする。

6 演習リンク

→ 基本演習 **連立系と安定性** exercise math differential-equations
https://study.bem130.com/exercise/math/differential-equations/連立系と安定性-基本演習/

7 関連リンク

→ 講義 **対角化の基本** lecture math linear-algebra
https://study.bem130.com/lecture/math/linear-algebra/対角化の基本-講義/

→ 講義 **ジョルダン標準形の入口** lecture math linear-algebra
https://study.bem130.com/lecture/math/linear-algebra/ジョルダン標準形の入口-講義/