線型化と固有値判定の入口

1 導入

このページの核心は、非線型系の平衡点の近傍で一次近似を抽出し、得られた線型系の固有値から局所安定性を判定することである。

2 標準形

対象は

$$\boldsymbol{x}' = \boldsymbol{F}(\boldsymbol{x})$$

である。平衡点 $\boldsymbol{x}_*$ は $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}_*) = \boldsymbol{0}$ を満たす点である。

3 なぜこの方針を選ぶのか

非線型系を厳密に解くことは困難である。しかし平衡点の近傍では Taylor 展開の一次項が支配的になる。変数 $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_*$ と置くと、

$$\boldsymbol{u}' = D\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}_*)\boldsymbol{u} + \text{高次項}$$

である。ここで $D\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}_*)$ は Jacobian 行列である。

4 固有値判定

Jacobian 行列の固有値の実部がすべて負なら、平衡点は局所漸近安定である。実部が正の固有値を含むなら不安定である。実部が 0 の固有値を含む場合は、高次項が本質になるため線型化だけでは判定できない。この判定は、平衡点が双曲型である場合に特に明瞭である。双曲型とは、Jacobian の固有値が虚軸上に存在しない場合を指す。このとき非線型系の近傍挙動は線型化により安定・不安定の分類を受ける。

5 具体例 1：Jacobian を実際に計算する

$$\begin{cases} x' = x(1 - x - y), \\ y' = y(2 - x - y) \end{cases}$$

で平衡点を確認すると、$(0,0), (1,0), (0,2)$ が得られる。右辺を $F_1 = x(1-x-y)$, $F_2 = y(2-x-y)$ とおくと、Jacobian は

$$J(x,y) = \begin{pmatrix} 1 - 2x - y & -x \\ -y & 2 - x - 2y \end{pmatrix}$$

である。$(1,0)$ では

$$J(1,0) = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

となり、固有値は $-1, 1$ である。正の固有値を含むため、$(1,0)$ は不安定である。線型化は、平衡点の近傍で一方向には接近し、別方向には離脱する構造を 抽出 している。

6 具体例 2：線型化だけで判定不能な場合

$$x' = x^2$$

では $x = 0$ が平衡点である。Jacobian に相当する導関数は $2x$ であり、$x = 0$ では 0 となる。固有値の実部が 0 であるため、線型化は安定性を判定しない。

しかし元の方程式では、$x > 0$ なら増加し、$x < 0$ なら 0 に接近する。左右で挙動が異なるため、高次項が本質である。この例は、線型化の適用範囲を判定する必要を示す。

7 分類表

固有値	線型化での型	局所挙動
実部がすべて負	安定節点または安定焦点	局所漸近安定
正の実部を含む	不安定節点・不安定焦点・鞍点	不安定
虚軸上の固有値を含む	中心または退化型	高次項の解析が必要

8 どこまで成り立つか

線型化は平衡点の近傍での局所理論である。遠方の挙動、周期軌道、大域安定性は別の解析を必要とする。また、線型化が有効であることは、非線型項を無視してよいことを無条件に意味しない。双曲型でない平衡点では、中心多様体や Lyapunov 関数など、別の道具が必要になる。

9 演習リンク

→ 基本演習 **連立系と安定性** exercise math differential-equations
https://study.bem130.com/exercise/math/differential-equations/連立系と安定性-基本演習/

10 関連リンク

→ 講義 **相平面と安定性** lecture math differential-equations
https://study.bem130.com/lecture/math/differential-equations/相平面と安定性-講義/