複素根と強制振動

1 導入

このページの核心は、特性方程式の複素根が振動を表し、非同次項が外力として振動系を駆動することを確認することである。

2 標準形

自由振動の代表形は

$$my'' + cy' + ky = 0$$

である。ここで $m > 0$ は質量、$c \geq 0$ は減衰係数、$k > 0$ はばね定数である。強制振動では

$$my'' + cy' + ky = F_0 \cos \omega t$$

のように周期外力を右辺に置く。

3 複素根と振動

特性根が $\alpha \pm i\beta$ なら、実数解は

$$y = e^{\alpha t}(C_1 \cos \beta t + C_2 \sin \beta t)$$

である。$\alpha < 0$ なら振幅は減衰し、$\alpha = 0$ なら減衰しない周期運動となる。β は角周波数であり、周期は $2\pi/\beta$ である。

4 強制振動と共振

外力の周波数 ω が系の固有周波数に近接すると、応答が増大する。減衰が存在する場合は応答は有限に保たれるが、減衰がない理想系で外力が同次解と同じ周波数を持つと、特解に $t \sin \omega t$ や $t \cos \omega t$ が現れる。

減衰のある強制振動

$$my'' + cy' + ky = F_0 \cos \omega t$$

では、定常応答を $A \cos \omega t + B \sin \omega t$ と仮定できる。微分しても $\cos \omega t, \sin \omega t$ の張る空間に留まるためである。振幅は

$$\frac{F_0}{\sqrt{(k - m\omega^2)^2 + (c\omega)^2}}$$

に比例する。したがって $k - m\omega^2$ が 0 に近接し、かつ c が小さいほど応答が増大する。この式は、共振を感覚的な語ではなく、分母が小さくなる現象として整理する。

5 具体例

$$y'' + 4y = 0$$

では特性根は $\pm 2i$ であり、

$$y = C_1 \cos 2t + C_2 \sin 2t$$

である。

$$y'' + 4y = \cos 2t$$

では右辺が同次解と重複するため、特解候補に t を掛ける補正が必要である。
具体的には $y_p = At \sin 2t$ と置くと、

$$y_{(p)''} + 4y_p = 4A \cos 2t$$

となるため、$A = 1/4$ を得る。したがって一つの特解は $y_p = \frac{1}{4} t \sin 2t$ である。振幅が時間に比例して増加することが、無減衰共振の特徴である。

6 単位の確認

ばね質点系では、my''、cy'、ky、$F_0 \cos \omega t$ はすべて力 [N] の単位を持つ。たとえば

$$\underbrace{k\ [\mathrm{N/m}]}_{\mathrm{N/m}} \times \underbrace{y\ [\mathrm{m}]}_{\mathrm{N}}$$

である。各項の次元が一致しなければ、振動方程式として加算できない。

7 どこまで成り立つか

ここでの共振は線型かつ定数係数のモデルを前提にする。非線型振動では、周波数が振幅に依存する場合や、複数の安定周期軌道が生じる場合がある。
また、現実の系では減衰、非線型性、材料限界、外力の有限時間性が作用する。無減衰で振幅が無限に増加する結論は、理想化された線型モデルの範囲で成立する。

8 演習リンク

→ 基本演習 **二階線型定数係数方程式** exercise math differential-equations
https://study.bem130.com/exercise/math/differential-equations/二階線型定数係数方程式-基本演習/

→ 基本演習 **二階線型微分方程式** exercise math differential-equations
https://study.bem130.com/exercise/math/differential-equations/二階線型微分方程式-基本演習/

9 関連リンク

→ 講義 **非同次方程式と未定係数法** lecture math differential-equations
https://study.bem130.com/lecture/math/differential-equations/非同次方程式と未定係数法-講義/