

と びぶんほうていしき あつか かいせきかい すうちかい 解けない微分方程式をどう扱うか：解析解・数値解・ ていせいてきかいせき やくわりぶんたん 定性的解析の役割分担

1 導入

このページの核心は、「解けない」を「初等関数で閉じた式に表現できない」という限定的な意味として扱い、存在・近似・挙動の解析を分離することである。

2 三つの役割

方法	目的	例
解析解	式として表現する	変数分離、特性方程式
数値解	指定点で近似値を得る	Euler 法、Runge-Kutta 法
定性的解析	増減・平衡・安定性を判定する	方向場、相平面

3 なぜこの方針を選ぶのか

微分方程式の実用では、閉じた式よりも、解の存在、安定か不安定か、長時間で発散するか、数値的に信頼できるかが重要になる。解析解がない場合に数学が停止するわけではない。

4 最初に判定すること

解法を探索する前に、問題を次の順序で判定する。

確認項目	設問	次の行動
型	分離形・線型・完全形などに該当するか	該当すれば解析解を試行する
定理	存在・一意性の仮定を満たすか	解析解の有無と独立に解の存在を確保する
数値	誤差と安定性を管理できるか	Euler 法だけでなく Runge-Kutta 法や陰的方法を検討する
挙動	平衡解・増減・爆発・周期性を判定できるか	方向場、相平面、エネルギーを用いる

この順序を採用する理由は、解析解の探索だけに固執すると、存在している解や安定性の情報を逸失するためである。閉じた式は有用だが、唯一の到達点ではない。

5 具体例 1：解析解より存在を先に確認する

$$y' = x^2 + y^2, \quad y(0) = 0$$

は初等的な標準解法へ直接は接続しない。しかし $f(x, y) = x^2 + y^2$ は滑らかであるため、局所的に一意解が存在する。Euler 法や Runge-Kutta 法で近似でき、方向場により正の領域では増加傾向が強まることも確認できる。

ここで重要なのは、標準解法に接続しないことと、数学的に扱えないことが同義ではない点である。存在・一意性を定理で確認し、数値解で近似し、方向場で傾向を判定する、という役割分担が成立する。

6 具体例 2：長時間挙動を優先する場合

$$y' = y - y^3$$

は分離形として積分できるが、実際には平衡解 $y = -1, 0, 1$ と符号の判定だけで多くの情報を得る。右辺

$g(y) = y(1 - y^2)$ とおくと、 $0 < y < 1$ では $g(y) > 0$ 、 $y > 1$ では $g(y) < 0$ である。したがって $y = 1$ は安定、 $y = 0$ は不安定と判定される。

と閉じた式を得る前に、位相線だけで長時間の吸引先を推定できる。この例は、定性的解析が解析解の代用品ではなく、別の目的を持つ解析であることを示す。

7 誤用しやすい点

- 解析解が得られないことを、解が存在しないことと混同してはならない。
- 数値解は近似であり、誤差と安定性の確認を省略してはならない。
- 方向場は厳密証明ではなく、挙動の推定と仮説形成に用いる。

8 どこまで成り立つか

このページの役割分担は、解析解・数値解・定性的解析を混同しないための基本方針である。ただし、解析解

が存在しないことを証明する作業は一般に難しく、初学段階では「標準解法に接続しない」と「閉じた式が存在しない」を同一視しない姿勢が重要である。

数値解は計算できる点で強力だが、刻幅、丸め誤差、安定性に依存する。定性的解析は全体像を把握する手段だが、局所線型化や符号判定だけで大域挙動を完全に決定できるとは限らない。目的に応じて、証明、近似、挙動判定を分担させることが必要である。

9 次に参照するページ

存在と一意性の保証を確認するなら、初期値問題の存在・一意性を先に確認する。数値解へ進むなら、方向場と Euler 法、さらに Runge-Kutta 法と陰的方法を参照する。

10 えんしゅう 演習リンク

→ 基本演習 **存在一意性と数値解法** exercise math differential-equations
<https://study.bem130.com/exercise/math/differential-equations/存在一意性と数値解法-基本演習/>

11 かんれん 関連リンク

→ 講義 **初期値問題の存在・一意性と Lipschitz 条件の入口** lecture math differential-equations
<https://study.bem130.com/lecture/math/differential-equations/初期値問題の存在・一意性と Lipschitz 条件の入口-講義/>

→ 講義 **方向場・Euler 法・誤差と安定性の入口** lecture math differential-equations
<https://study.bem130.com/lecture/math/differential-equations/方向場・Euler 法・誤差と安定性の入口-講義/>