

# 非同次方程式と未定係数法

## 1 導入

このページの核心は、非同次線型方程式の一般解を同次解と特解に分解し、未定係数法が成立する条件を明示することである。

## 2 標準形

$$L[y] = ay'' + by' + cy = f(x)$$

を考える。ここでは  $a, b, c$  が定数である場合を中心に扱う。

## 3 なぜこの方針を選ぶのか

線型性により、 $y_p$  が  $L[y_p] = f(x)$  を満たし、 $y_h$  が  $L[y_h] = 0$  を満たすなら、

$$L[y_h + y_p] = f(x)$$

である。したがって一般解は  $y = y_h + y_p$  となる。

## 4 未定係数法の条件

未定係数法は、定数係数であり、右辺  $f(x)$  が多項式・指数関数・正弦・余弦、またはそれらの有限和

・有限積である場合に特に有効である。

この条件が必要になる理由は、これらの関数族が微分で有限次元空間の内部に留まるからである。たとえば  $e^{2x}$  は微分しても  $e^{2x}$  の定数倍である。

候補は右辺をそのまま模倣するのではなく、微分で閉じる関数空間を選択する。

右辺の形	特解候補の基本形	理由
$p_n(x)$	$n$ 次多項式	微分で次数が下がるだけである
$e^{\alpha x}$	$Ae^{\alpha x}$	微分で定数倍になる
$\cos \beta x, \sin \beta x$	$A \cos \beta x + B \sin \beta x$	微分で 2 次元空間の内部に留まる
$e^{\alpha x} p_n(x)$	$e^{\alpha x} q_n(x)$	指数因子と多項式空間が保たれる

## 5 具体例 1: 右辺が多項式の場合

$$y'' - y = x$$

を考える。同次解は  $y_h = C_1 e^x + C_2 e^{-x}$  である。右辺が 1 次多項式であるため、特解候補を  $y_p = Ax + B$  と設定する。この候補を選択する理由は、微分しても  $1, x$  の張る有限次元空間の内部に留まるためである。

$$y_{(p)}'' - y_p = 0 - (Ax + B) = -Ax - B$$

これが  $x$  に一致するため、 $-A = 1$ 、 $-B = 0$  であり、 $A = -1$ 、 $B = 0$  を得る。したがって特解は  $y_p = -x$  であり、

$$y = C_1 e^x + C_2 e^{-x} - x$$

を得る。計算の要点は、候補を当てることではなく、候補空間が微分作用で閉じることを利用する点にある。

## 6 共鳴と補正

$$y'' + y = \cos x$$

では同次解に  $\cos x, \sin x$  が含まれる。したがって  $A \cos x + B \sin x$  を特解候補にすると同次解と重複し、新たな特解を生成できない。この場合は  $x(A \cos x + B \sin x)$  とし、線型独立性を回復する。実際、 $y_p = x(A \cos x + B \sin x)$  と設定して代入すると、一つの特解として  $y_p = \frac{1}{2}x \sin x$  が得られる。 $x$  を掛ける操作は暗記項目ではなく、同次解空間との重複を回避するための線型代数的補正である。

## 7 反例となる状況

$$y'' + y = \tan x$$

では  $\tan x$  とその導関数は有限個の候補関数で閉じない。したがって未定係数法は自然な方法ではない。この場合は定数変化法などを検討する。さらに、係数が変数に依存する  $y'' + xy = f(x)$  のような方程式では、右辺が単純でも未定係数法の構造は崩れる。未定係数法は、定数係数の線型作用素が有限次元関数空間を保つことに依存するためである。

## 8 未定係数法と定数変化法の棲み分け

方法	長所	制約
未定係数法	計算が短い	定数係数と右辺の形に強く依存する
定数変化法	右辺の形に比較的依存しない	積分が重くなりやすい

最初に未定係数法を試行する理由は計算効率である。ただし条件が外れた瞬間に、定数変化法や基本解行列へ移行する判断が必要になる。

## 9 どこまで成り立つか

未定係数法は、定数係数線型作用素が有限次元関数空間を保つ場合に計算効率を発揮する方法である。したがって、右辺の形が複雑な場合、係数が変数に依存する場合、または同次解との重複を補正しない場合には破綻する。

ただし、未定係数法が不適であることは、非同次方程式が解けないことを意味しない。定数変化法は右辺の形への依存が弱く、積分表示として特解を構成できる場合が多い。方法選択では、候補空間が微分で閉じるかを最初に確認する。

## 10 演習リンク

→ 標準演習 非同次方程式と特解構成 [exercise](#) [math](#) [differential-equations](#)  
<https://study.bem130.com/exercise/math/differential-equations/非同次方程式と特解構成-標準演習/>

## 11 関連リンク

→ 講義 定数変化法と Wronskian [lecture](#) [math](#) [differential-equations](#)  
<https://study.bem130.com/lecture/math/differential-equations/定数変化法と Wronskian-講義/>