

離散数学ポータル

23 pages

Table of Contents

1	<small>りきんすうがく</small> 離散数学ポータル	19
1.1	<small>ろんり</small> <small>しょうめい</small> 論理と証明	19
1.2	<small>しゅうごう</small> 集合	20
1.3	<small>かんけい</small> 関係	20
1.4	<small>じゅんじょ</small> <small>そく</small> 順序と束	21
1.5	<small>しゃぞう</small> 写像	21
1.6	<small>なに</small> <small>か</small> <small>なに</small> <small>か</small> 何を変え、何を変えないか	22
1.7	<small>えんしゅう</small> 演習リンク	22
1.8	まとめ	23
2	<small>めいだい</small> <small>じゅつご</small> <small>りょうか</small> 命題・述語と量化 <small>proposition</small> <small>predicate</small> <small>quantification</small>	24
2.1	<small>めいだい</small> <small>なに</small> 命題とは何か <small>proposition</small>	24
2.2	<small>しんりしゅうごう</small> <small>よ</small> 真理集合として読む <small>truth set</small>	24
2.3	<small>ろんりけつごうし</small> 論理結合子 <small>logical connective</small>	25
2.4	<small>ぜんしゅうりょうか</small> <small>そんざいりょうか</small> 全称量化と存在量化 <small>universal quantification</small> <small>existential quantification</small>	25
2.5	<small>ひてい</small> <small>りょうか</small> <small>そと</small> <small>だ</small> 否定は量化の外に出す	26

2.6	ぐたいれい ほうがんかんけい ろんり よ 具体例：包含関係を論理で読む <small>inclusion relation</small>	26
2.7	えんしゅう 演習リンクとまとめ	26
3	しょうめいほう はんれい 証明法と反例 <small>proof method counterexample</small>	27
3.1	ちよくせつしょうめい 直接証明 <small>direct proof</small>	27
3.2	たいぐうしょうめい 対偶証明 <small>proof by contraposition</small>	27
3.3	はいりほう 背理法 <small>proof by contradiction</small>	28
3.4	ばあいわ 場合分け <small>proof by cases</small>	28
3.5	はんれい 反例 <small>counterexample</small>	29
3.6	えんしゅう 演習リンクとまとめ	29
4	すうがくてききのうほう さいきてきていぎ 数学的帰納法と再帰的定義	30
4.1	すうがくてききのうほう かたち 数学的帰納法の形	30
4.2	さいきてきていぎ なぜこれで十分か	30
4.3	ぐたいれい ゆうげんしゅうごう べきしゅうごう おお 具体例：有限集合の冪集合の大きさ	31
4.4	さいきてきていぎ 再帰的定義	31
4.5	ちゅうい 注意	32
4.6	かんれん 関連リンク	32

4.7	まとめ	32
5	集合の基本 <small>しゅうごう きほん set</small>	33
5.1	導入 <small>どうにゅう</small>	33
5.2	用語と定義 <small>ようご ていぎ</small>	33
5.3	方針 <small>ほうしん</small>	34
5.4	直感的な説明 <small>ちよっかんてき せつめい</small>	34
5.5	厳密な説明 <small>げんみつ せつめい</small>	34
5.6	例題：部分集合を定義から確認する <small>れいだい ぶぶんしゅうごう ていぎ かくにん subset</small>	35
5.6.1	問題 <small>もんだい</small>	35
5.6.2	解説 <small>かいせつ</small>	35
5.7	変わるものと保存されるもの <small>か ほぞん</small>	36
5.8	見分け方 <small>みわ かた</small>	36
5.9	演習リンク <small>えんしゅう</small>	36
5.10	関連リンク <small>かんれん</small>	37
6	集合演算と包含関係 <small>しゅうごうえんざん ほうがんかんけい set operation inclusion relation</small>	38
6.1	導入 <small>どうにゅう</small>	38

6.2	<small>ようご ていぎ</small> 用語と定義	38
6.3	<small>ほうしん</small> 方針	39
6.4	<small>ちよっかんてき せつめい</small> 直感的な説明	39
6.5	<small>げんみつ せつめい</small> 厳密な説明	39
6.6	<small>れいだい</small> 例題：ド・モルガンの法則を元で証明する <small>De Morgan's laws element</small>	40
6.6.1	<small>もんだい</small> 問題	40
6.6.2	<small>かいせつ</small> 解説	40
6.7	<small>か ほぞん</small> 変わるものと保存されるもの	40
6.8	<small>みわ かた</small> 見分け方	41
6.9	<small>しょうめい ほそく しゅうごうえんざん ほうがん たも りゆう</small> 証明補足：集合演算が包含を保つ理由	41
6.10	<small>えんしゅう</small> 演習リンク	42
6.11	<small>かんれん</small> 関連リンク	42
7	<small>しゅうごうぞく そえじしゅうごう</small> 集合族と添字集合 <small>family of sets index set</small>	43
7.1	<small>どうにゅう</small> 導入	43
7.2	<small>ようご ていぎ</small> 用語と定義	43
7.3	<small>ほうしん</small> 方針	44

7.4	<small>ちよっかんてき</small> <small>せつめい</small> 直感的な説明	44
7.5	<small>げんみつ</small> <small>せつめい</small> <small>から</small> <small>そえじしゅうごう</small> 厳密な説明：空の添字集合 <small>index set</small>	44
7.6	<small>れいだい</small> <small>そえじつ</small> <small>きょうつうぶぶん</small> 例題：添字付き共通部分 <small>indexed intersection</small>	45
7.6.1	<small>もんだい</small> 問題	45
7.6.2	<small>かいせつ</small> 解説	45
7.7	<small>みわ</small> <small>かた</small> <small>かんれん</small> 見分け方と関連リンク	45
8	<small>ちよくせきしゅうごう</small> <small>きほん</small> 直積集合の基本 <small>Cartesian product</small>	47
8.1	<small>どうにゅう</small> 導入	47
8.2	<small>ようご</small> <small>ていぎ</small> 用語と定義	47
8.3	<small>ほうしん</small> 方針	47
8.4	<small>ちよっかんてき</small> <small>せつめい</small> 直感的な説明	48
8.5	<small>げんみつ</small> <small>せつめい</small> 厳密な説明	48
8.6	<small>れいだい</small> <small>ちよくせきしゅうごう</small> <small>じゅんじょ</small> 例題：直積集合と順序 <small>Cartesian product</small>	49
8.6.1	<small>もんだい</small> 問題	49
8.6.2	<small>かいせつ</small> 解説	49
8.7	<small>か</small> <small>ほぞん</small> 変わるものと保存されるもの	49

8.8	<small>みわ かた</small> 見分け方	50
8.9	<small>しょうめい ほそく ちよくせき ほうがん たも じょうけん</small> 証明補足：直積が包含を保つ条件	50
8.10	<small>えんしゅう</small> 演習リンク	51
8.11	<small>かんれん</small> 関連リンク	51
9	<small>しゅうごう きほん</small> べき集合の基本 <small>power set</small>	52
9.1	<small>どうにゅう</small> 導入	52
9.2	<small>ようご ていぎ</small> 用語と定義	52
9.3	<small>ほうしん こすう かぞ</small> 方針：個数を数える <small>cardinality</small>	52
9.4	<small>ちよっかんてき れい</small> 直感的な例	53
9.5	<small>げんみつ つか かた</small> 厳密な使い方	53
9.6	<small>きょうかいれい くうしゅうごう</small> 境界例：空集合 <small>empty set</small>	53
9.7	<small>れいだい しゅうごう げん ほんてい</small> 例題：べき集合の元を判定する <small>power set element</small>	54
9.7.1	<small>もんだい</small> 問題	54
9.7.2	<small>かいせつ</small> 解説	54
9.8	<small>ほうがんじゅんじょ しゅうごう</small> 包含順序としてのべき集合 <small>inclusion order power set</small>	54
9.9	<small>しょうめい ほそく しゅうごう ほうがん どうちせい</small> 証明補足：べき集合と包含の同値性	55

9.10	見分け方と関連リンク	55
10	集合の濃度と可算性	57
10.1	導入	57
10.2	用語と定義	57
10.3	方針	58
10.4	直感的な説明	58
10.5	厳密な説明：対角線論法の入口	58
10.6	例題：偶数全体は可算集合である	59
10.6.1	問題	59
10.6.2	解説	59
10.7	見分け方と関連リンク	59
11	関係の基本	61
11.1	導入	61
11.2	用語と定義	61
11.3	方針	62
11.4	直感的な説明	62

11.5	じゅうよう せいしつ 重要な性質 property	62
11.6	れいだい せいじよかんけい ほんてい 例題：整除関係を判定する divisibility relation	63
11.6.1	もんだい 問題	63
11.6.2	かいせつ 解説	63
11.7	みわ かた かんれん 見分け方と関連リンク	64
12	かんけい ごうせい へいほう 関係の合成と閉包 relation composition closure	65
12.1	どうにゅう 導入	65
12.2	ようご ていぎ ごうせい 用語と定義：合成 composition	65
12.3	ようご ていぎ こうとうかんけい ぎやくかんけい 用語と定義：恒等関係と逆関係 identity relation inverse relation	65
12.4	へいほう なに 閉包とは何か closure	66
12.5	ほうしん 方針	66
12.6	ちよっかんてき せつめい 直感的な説明	66
12.7	れいだい すいひへいほう つく 例題：推移閉包を作る transitive closure	67
12.7.1	もんだい 問題	67
12.7.2	かいせつ 解説	67
12.8	しょうめい ほそく すいひへいほう さいしょうせい 証明補足：推移閉包の最小性 transitive closure	67

12.9	<small>みわ かた かんれん</small> 見分け方と関連リンク	68
13	<small>どうちかんけい ぶんかつ</small> 同値関係と分割 <small>equivalence relation partition</small>	69
13.1	<small>どうにゆう</small> 導入	69
13.2	<small>ようご ていぎ</small> 用語と定義	69
13.3	<small>ほうしん</small> 方針	70
13.4	<small>ちよっかんてき せつめい</small> 直感的な説明	70
13.5	<small>げんみつ せつめい どうちかんけい ぶんかつ</small> 厳密な説明：同値関係から分割へ <small>equivalence relation partition</small>	71
13.6	<small>ぎやく ぶんかつ どうちかんけい</small> 逆に、分割から同値関係へ <small>partition equivalence relation</small>	71
13.7	<small>れいだい ごうどう どうちかんけい</small> 例題：合同による同値関係 <small>equivalence relation</small>	72
13.7.1	<small>もんだい</small> 問題	72
13.7.2	<small>かいせつ</small> 解説	72
13.8	<small>みわ かた</small> 見分け方	72
13.9	<small>しょうめい ほそく どうちかんけい ぶんかつ おな じょうほう</small> 証明補足：同値関係と分割は同じ情報である	73
13.10	<small>えんしゅう</small> 演習リンク	73
13.11	<small>かんれん</small> 関連リンク	74
14	<small>しょうしゅうごう しぜん しゃえい</small> 商集合と自然な射影 <small>quotient set canonical projection</small>	75

14.1	<small>どうにゆう</small> 導入	75
14.2	<small>ようご ていぎ</small> 用語と定義	75
14.3	<small>ほうしん</small> 方針	76
14.4	<small>ちよっかんでき せつめい</small> 直感的な説明	76
14.5	<small>well-definedness</small> well-defined 性とは何か	76
14.6	<small>れいだい しぜん しゃえい</small> 例題：自然な射影 <small>canonical projection</small>	77
14.6.1	<small>もんだい</small> 問題	77
14.6.2	<small>かいせつ</small> 解説	77
14.7	<small>みわ かた かんれん</small> 見分け方と関連リンク	77
15	<small>はんじゆんじよかんけい ぜんじゆんじよかんけい</small> 半順序関係と全順序関係 <small>partial order total order</small>	79
15.1	<small>どうにゆう</small> 導入	79
15.2	<small>ようご ていぎ</small> 用語と定義	79
15.3	<small>ほうしん</small> 方針	80
15.4	<small>ちよっかんでき せつめい</small> 直感的な説明	80
15.5	<small>だいひょうれい</small> 代表例	80
15.5.1	<small>しゆうごう ほうがんじゆんじよ</small> 1. べき集合の包含順序 <small>power set inclusion order</small>	80

15.5.2	2. 正の整数の整除順序 <small>せい せいすう せいじょじゅんじょ integer divisibility order</small>	81
15.5.3	3. 数の通常 <small>かず つうじょう だいしょう</small> の大小	81
15.6	例題：半順序 <small>れいだい はんじゅんじょ</small> だが全順序 <small>ぜんじゅんじょ</small> ではないことを示す <small>しめ</small> <small>partial order total order</small>	81
15.6.1	問題 <small>もんだい</small>	81
15.6.2	解説 <small>かいせつ</small>	81
15.7	見分け方 <small>みわ かた</small>	82
15.8	証明補足 <small>しょうめい ぼそく</small> ：部分集合 <small>ぶぶんしゅうごう</small> への制限 <small>せいげん</small> で順序 <small>じゅんじょ</small> が保存 <small>ぼぞん</small> される	82
15.9	演習リンク <small>えんしゅう</small>	83
15.10	関連リンク <small>かんれん</small>	83
16	Hasse図 <small>ず</small> と極大元 <small>きょくたいてん</small> ・極小元 <small>きょくしょうげん</small> <small>Hasse diagram maximal element minimal element</small>	84
16.1	導入 <small>どうにゅう</small>	84
16.2	用語 <small>ようご</small> と定義 <small>ていぎ</small>	84
16.3	極大 <small>きょくだい</small> ・最大 <small>さいだい</small> ・極小 <small>きょくしょう</small> ・最小 <small>さいしょう</small>	84
16.4	方針 <small>ほうしん</small>	85
16.5	直感的な説明 <small>ちよっかんてき せつめい</small>	85
16.6	例題 <small>れいだい</small> ：極大元 <small>きょくたいてん</small> と最大元 <small>さいだいてん</small> <small>maximal element greatest element</small>	86

16.6.1	<small>もんだい</small> 問題	86
16.6.2	<small>かいせつ</small> 解説	86
16.7	<small>みわ かた</small> 見分け方	86
16.8	<small>えんしゅう かんれん</small> 演習・関連リンク	87
17	<small>じゅんじょどうけい せいれつじゅんじょ</small> 順序同型と整列順序	88
17.1	<small>じゅんじょ たも しゃぞう</small> 順序を保つ写像	88
17.2	<small>じゅんじょどうけい</small> 順序同型	88
17.3	<small>くまり ほんくさり</small> 鎖と反鎖	89
17.4	<small>せいれつじゅんじょ</small> 整列順序	89
17.5	<small>なに か み</small> 何を変えずに見ているか	90
17.6	<small>えんしゅう</small> 演習リンク	90
17.7	まとめ	90
17.8	<small>かんれん</small> 関連リンク	91
18	<small>そく きほん</small> 束の基本	92
	<small>lattice</small>	
18.1	<small>どうにゅう</small> 導入	92
18.2	<small>ようご ていぎ</small> 用語と定義	92

18.3	<small>ほうしん</small> 方針	93
18.4	<small>ちよっかんてき</small> <small>せつめい</small> 直感的な説明	93
18.5	<small>だいひょうれい</small> 代表例	94
18.5.1	<small>しゅうごう</small> <small>そく</small> べき集合は束である <small>power set</small> <small>lattice</small>	94
18.5.2	<small>せい</small> <small>せいすう</small> <small>せいじょじゅんじょ</small> 正の整数の整除順序 <small>integer</small> <small>divisibility order</small>	94
18.6	<small>れいだい</small> <small>ほうがんにゅんじょ</small> <small>むす</small> <small>まじ</small> <small>もと</small> 例題：包含順序で結びと交わりを求める <small>inclusion order</small> <small>join</small> <small>meet</small>	94
18.6.1	<small>もんだい</small> 問題	94
18.6.2	<small>かいせつ</small> 解説	95
18.7	<small>か</small> <small>ほぞん</small> 変わるものと保存されるもの	95
18.8	<small>みわ</small> <small>かた</small> 見分け方	95
18.9	<small>しょうめい</small> <small>ほそく</small> <small>たんちょうせい</small> 証明補足：meet と join の単調性	96
18.10	<small>えんしゅう</small> 演習リンク	96
18.11	<small>かんれん</small> 関連リンク	96
19	<small>きほん</small> ブール代数の基本 <small>Boolean algebra</small>	98
19.1	<small>めいだい</small> <small>しゅうごう</small> <small>たいおう</small> 命題と集合の対応	98
19.2	<small>べきしゅうごう</small> 冪集合はブール代数になる <small>power set</small> <small>Boolean algebra</small>	99

19.3	ド・モルガンの法則 <small>De Morgan's laws</small>	99
19.4	何を抽象化しているか <small>なに ちゆうしようか</small>	99
19.5	証明補足：補元の一意性 <small>しょうめい ほそく ほげん いちいせい complement</small>	100
19.6	証明補足：ド・モルガンの法則 <small>しょうめい ほそく De Morgan's laws</small>	100
19.7	演習リンクとまとめ <small>えんしゅう</small>	100
20	写像の基本 <small>しゃぞう きほん map</small>	102
20.1	導入 <small>どうにゅう</small>	102
20.2	用語と定義 <small>ようご ていぎ</small>	102
20.3	像と逆像 <small>ぞう ぎやくぞう image preimage</small>	102
20.4	方針 <small>ほうしん</small>	103
20.5	直感的な説明 <small>ちよつかんてき せつめい</small>	103
20.6	厳密な説明 <small>げんみつ せつめい</small>	104
20.7	例題：終域と値域を区別する <small>れいだい しゅういき ちいき くべつ codomain range</small>	104
20.7.1	問題 <small>もんだい</small>	104
20.7.2	解説 <small>かいせつ</small>	104
20.8	変わるものと保存されるもの <small>か ほぞん</small>	105

20.9	<small>みわ かた かんれん</small> 見分け方と関連リンク	105
21	<small>しゃぞう ぞう ぎやくぞう</small> 写像の像と逆像 <small>map image preimage</small>	107
21.1	<small>ぞう</small> 像 <small>image</small>	107
21.2	<small>ぎやくぞう</small> 逆像 <small>preimage</small>	107
21.3	<small>ぎやくぞう しゅうごうえんざん あいしょう</small> 逆像は集合演算と相性がよい <small>preimage set operations</small>	108
21.4	<small>ぞう きょうつうぶぶん ちゅうい</small> 像では共通部分に注意する <small>image intersection</small>	108
21.5	<small>ほんれい ぞう きょうつうぶぶん ぼぞん</small> 反例：像は共通部分を保存しない <small>image intersection</small>	108
21.6	<small>なに か なに ぼぞん</small> 何が変わり、何が保存されるか <small>intersection</small>	109
21.7	<small>しょうめい ほそく ぎやくぞう しゅうごうえんざん たも りゆう</small> 証明補足：逆像が集合演算を保つ理由 <small>preimage set operations</small>	109
21.8	<small>えんしゅう</small> 演習リンクとまとめ	109
22	<small>たんしゃ ぜんしゃ ぜんたんしゃ</small> 単射・全射・全単射 <small>injection surjection bijection</small>	110
22.1	<small>どうにゅう</small> 導入	110
22.2	<small>ようご ていぎ</small> 用語と定義	110
22.3	<small>ほうしん</small> 方針	111
22.4	<small>ちよっかんてき せつめい</small> 直感的な説明	111
22.5	<small>ゆうげんしゅうごう こすう みかた</small> 有限集合での個数の見方 <small>finite set count</small>	111

22.6	<small>むげんしゅうごう</small> 無限集合での注意 <small>ちゅうい</small>	112
22.7	<small>れいだい</small> 例題：単射と全射を判定する <small>たんしゃ</small> <small>ぜんしゃ</small> <small>はんでい</small> <small>injection</small> <small>surjection</small>	112
22.7.1	<small>もんだい</small> 問題	112
22.7.2	<small>かいせつ</small> 解説	112
22.8	<small>みわ</small> <small>かた</small> <small>かんれん</small> 見分け方と関連リンク	113
23	<small>ごうせいしゃぞう</small> 合成写像と逆写像 <small>ぎゃくしゃぞう</small> <small>composite map</small> <small>inverse map</small>	114
23.1	<small>どうにゅう</small> 導入	114
23.2	<small>ようご</small> <small>ていぎ</small> 用語と定義	114
23.3	<small>ほうしん</small> 方針	115
23.4	<small>ちよっかんでき</small> <small>せつめい</small> 直感的な説明	115
23.5	<small>げんみつ</small> <small>せつめい</small> <small>ぎゃくしゃぞう</small> <small>ぜんたんしゃ</small> 厳密な説明：逆写像と全単射 <small>inverse map</small> <small>bijection</small>	115
23.6	<small>れいだい</small> 例題：合成写像と逆写像 <small>ごうせいしゃぞう</small> <small>ぎゃくしゃぞう</small> <small>composite map</small> <small>inverse map</small>	116
23.6.1	<small>もんだい</small> 問題	116
23.6.2	<small>かいせつ</small> 解説	116
23.7	<small>みわ</small> <small>かた</small> 見分け方	117
23.8	<small>しょうめい</small> <small>ほそく</small> <small>ごうせい</small> <small>たんしゃ</small> <small>ぜんしゃ</small> <small>ほぞん</small> <small>りゆう</small> 証明補足：合成で単射・全射が保存される理由	117

23.9	<small>えんしゅう</small> 演習リンク	117
23.10	<small>かんれん</small> 関連リンク	118

りさんすうがく 離散数学ポータル

離散数学は、連続的に変化する量ではなく、分かれた対象とその関係を扱う数学である。最初に学ぶべき中心は、集合、関係、写像である。ただし、これらは孤立した用語ではない。命題、述語、量化、証明の上には立っている。

したがって、この分野では次の順に読む。

1. 論理と証明で、定義を正確に読む準備をする。
2. 集合と集合演算で、対象の集まりを扱う。
3. 関係で、対象どうしの結びつきを扱う。
4. 順序と束で、比較と上下構造を扱う。
5. 写像で、対象を別の対象へ送る規則を扱う。

この順序は依存関係を表している。後の章では、前に定義した集合、関係、写像を何度も再利用するため、用語を孤立して覚えるのではなく接続を追う。

1 論理と証明

→ **講義** 命題・述語と量化 **lecture** **math** **discrete-math**

<https://study.bem130.com/lecture/math/discrete-math/命題・述語と量化-講義/>

→ **講義** 証明法と反例 **lecture** **math** **discrete-math**

<https://study.bem130.com/lecture/math/discrete-math/証明法と反例-講義/>

→ **講義** 数学的帰納法と再帰的定義 **lecture** **math** **discrete-math**

<https://study.bem130.com/lecture/math/discrete-math/数学的帰納法と再帰的定義-講義/>

2 集合

しゅうごう

→ 講義 集合の基本 lecture math discrete-math

<https://study.bem130.com/lecture/math/discrete-math/集合の基本-講義/>

→ 講義 集合演算と包含関係 lecture math discrete-math

<https://study.bem130.com/lecture/math/discrete-math/集合演算と包含関係-講義/>

→ 講義 集合族と添字集合 lecture math discrete-math

<https://study.bem130.com/lecture/math/discrete-math/集合族と添字集合-講義/>

→ 講義 直積集合の基本 lecture math discrete-math

<https://study.bem130.com/lecture/math/discrete-math/直積集合の基本-講義/>

→ 講義 べき集合の基本 lecture math discrete-math

<https://study.bem130.com/lecture/math/discrete-math/べき集合の基本-講義/>

→ 講義 集合の濃度と可算性 lecture math discrete-math

<https://study.bem130.com/lecture/math/discrete-math/集合の濃度と可算性-講義/>

3 関係

かんけい

→ 講義 関係の基本 lecture math discrete-math

<https://study.bem130.com/lecture/math/discrete-math/関係の基本-講義/>

→ 講義 関係の合成と閉包 lecture math discrete-math

<https://study.bem130.com/lecture/math/discrete-math/関係の合成と閉包-講義/>

→ 講義 同値関係と分割 lecture math discrete-math

<https://study.bem130.com/lecture/math/discrete-math/同値関係と分割-講義/>

→ 講義 商集合と自然な射影 lecture math discrete-math

<https://study.bem130.com/lecture/math/discrete-math/商集合と自然な射影-講義/>

4 順序と束

じゅんじょ そく

→ 講義 半順序関係と全順序関係 lecture math discrete-math

<https://study.bem130.com/lecture/math/discrete-math/半順序関係と全順序関係-講義/>

→ 講義 Hasse 図と極大・極小 lecture math discrete-math

<https://study.bem130.com/lecture/math/discrete-math/Hasse 図と極大・極小-講義/>

→ 講義 順序同型と整列順序 lecture math discrete-math

<https://study.bem130.com/lecture/math/discrete-math/順序同型と整列順序-講義/>

→ 講義 束の基本 lecture math discrete-math

<https://study.bem130.com/lecture/math/discrete-math/束の基本-講義/>

→ 講義 ブール代数の基本 lecture math discrete-math

<https://study.bem130.com/lecture/math/discrete-math/ブール代数の基本-講義/>

5 写像

しゃぞう

→ 講義 写像の基本 lecture math discrete-math

<https://study.bem130.com/lecture/math/discrete-math/写像の基本-講義/>

→ 講義 **写像の像と逆像** lecture math discrete-math

<https://study.bem130.com/lecture/math/discrete-math/写像の像と逆像-講義/>

→ 講義 **単射・全射・全単射** lecture math discrete-math

<https://study.bem130.com/lecture/math/discrete-math/単射・全射・全単射-講義/>

→ 講義 **合成写像と逆写像** lecture math discrete-math

<https://study.bem130.com/lecture/math/discrete-math/合成写像と逆写像-講義/>

6 何を変え、何を変えないか

離散数学では、操作のたびに「何を変えて、何を保存するか」を見る。

discrete mathematics

対象	変えるもの	保存して見たいもの
集合演算 set operation	元の採用条件	所属条件の論理構造
同値関係 equivalence relation	個々の元の見方	同じ種類として分類される構造
順序同型 order isomorphism	元の名前や表示	比較関係、最大元、最小元、上界、下界
写像 map	入力 を 出力 へ送る	規則、像、逆像、合成の型

この見方を先に持つておくと、定義を丸暗記せずに、なぜその定義が必要なのかを追える。

各操作では、入力の型、所属条件、比較関係、到達可能性のどれが保存されるかを明示する。この確認により、似た記号を見たときの誤った類推を避けられる。

7 演習リンク

→ 基本演習 **論理と証明法** exercise math discrete-math

<https://study.bem130.com/exercise/math/discrete-math/論理と証明法-基本演習/>

→ 基本演習 **集合と集合演算** exercise math discrete-math

<https://study.bem130.com/exercise/math/discrete-math/集合と集合演算-基本演習/>

→ 基本演習 **直積集合とべき集合** exercise math discrete-math

<https://study.bem130.com/exercise/math/discrete-math/直積集合とべき集合-基本演習/>

→ 基本演習 **関係と同値関係** exercise math discrete-math

<https://study.bem130.com/exercise/math/discrete-math/関係と同値関係-基本演習/>

→ 基本演習 **順序関係と束** exercise math discrete-math

<https://study.bem130.com/exercise/math/discrete-math/順序関係と束-基本演習/>

→ 基本演習 **順序同型とブール代数** exercise math discrete-math

<https://study.bem130.com/exercise/math/discrete-math/順序同型とブール代数-基本演習/>

→ 基本演習 **写像と単射全射** exercise math discrete-math

<https://study.bem130.com/exercise/math/discrete-math/写像と単射全射-基本演習/>

→ 基本演習 **像と逆像** exercise math discrete-math

<https://study.bem130.com/exercise/math/discrete-math/像と逆像-基本演習/>

8 まとめ

りきんすうがく いりぐち しゅうごう かんけい しゃざう べつ べつべつ おぼ じゅつご りようか しょうめい どだい
 離散数学discrete mathematicsの入口では、集合set、関係relation、写像mapを別々に覚えるのではなく、述語predicate、量化quantification、証明proofを土台として
りかい
 つなげて理解する。

命題・述語と量化

proposition predicate quantification

離散数学で最初に固定したいのは、「何について述べている文なのか」を曖昧にしないことである。集合、関係、写像は、どれも「ある対象が条件を満たすか」を材料にして作られる。したがって、命題と述語を先に整理しておく、後の定義が自然に読める。

→ 講義 集合の基本 lecture math discrete-math

<https://study.bem130.com/lecture/math/discrete-math/集合の基本-講義/>

1 命題とは何か

proposition

命題とは、真か偽かが定まる文である。

$$2 + 3 = 5$$

は真である。一方、

$$x + 3 = 5$$

は、 x を決めなければ真偽が定まらない。そのため、これは x についての述語である。

述語は、対象を入れると命題になる文である。たとえば $P(x) : x$ は偶数である とおけば、 $P(2)$ は真で、 $P(3)$ は偽である。

命題は真か偽が決まる文であり、自由変数が残る文は述語として扱う。述語は、値を代入するか量化すると命題になる。

2 真理集合として読む

truth set

述語を集合と結びつける見方が重要である。全体集合を U とし、述語 $P(x)$ を考える。このとき

$$\{x \in U \mid P(x)\}$$

は、 $P(x)$ を真にする 元 全体の 集合 である。この 集合 を 真理集合 と呼ぶ。

element set set truth set

直感的には、述語は「ふるい」であり、真理集合はそのふるいを通して対象の集まりである。

predicate truth set

真理集合は、対象として許す領域に依存する。同じ式でも領域を変えると、真理集合や全称量化・

存在量化の真偽が変わることがある。

truth set
universal quantification
existential quantification

3 論理結合子

ろんりけつごうし
logical connective

命題から新しい命題を作る操作を論理結合子という。

proposition proposition logical connective

記号	よ 読み	いみ 意味
$P \wedge Q$	かつ	P も Q も 真
$P \vee Q$	または	少なくとも一方が真
$\neg P$	でない	P の真偽を反転する
$P \Rightarrow Q$	ならば	P が真なら Q も真
$P \Leftrightarrow Q$	同値	P と Q の真偽が一致する

含意 $P \Rightarrow Q$ は「 P が真である 状況 では Q も真である」という主張である。

implication

4 全称量化 と 存在量化

ぜんしょうりょうか そんざいりょうか
universal quantification existential quantification

量化は、変数の範囲を指定して命題を作る操作である。

quantification

$$\forall x \in A, P(x)$$

は「 A のすべての x について $P(x)$ が成り立つ」という意味である。これを 全称量化 という。

universal quantification

$$\exists x \in A, P(x)$$

は「 A の中に $P(x)$ を満たす x が少なくとも 1 つ存在する」という意味である。これを 存在量化 という。

existential quantification

5 否定は量化の外に出す

量化を含む命題を否定するときは、量化記号が入れ替わる。

$$\neg(\forall x \in A, P(x)) \Leftrightarrow \exists x \in A \text{ such that } \neg P(x)$$

$$\neg(\exists x \in A, P(x)) \Leftrightarrow \forall x \in A, \neg P(x)$$

「すべてが成り立つ」の否定は「少なくとも1つ反例がある」である。「存在する」の否定は「すべて存在しない」である。

→ [講義](#) [単射・全射・全単射](#) [lecture](#) [math](#) [discrete-math](#)

<https://study.bem130.com/lecture/math/discrete-math/単射・全射・全単射-講義/>

6 具体例：包含関係を論理で読む

inclusion relation

$A \subseteq B$ は次の命題である。

$$\forall x, x \in A \Rightarrow x \in B$$

したがって、 $A \subseteq B$ を否定すると、

$$\exists x \text{ such that } x \in A \text{ and } x \notin B$$

となる。つまり、 A に属するが B には属さない元が1つでも見つければ、包含は壊れる。

7 演習リンクとまとめ

→ [基本演習](#) [論理と証明法](#) [exercise](#) [math](#) [discrete-math](#)

<https://study.bem130.com/exercise/math/discrete-math/論理と証明法-基本演習/>

命題は真偽が定まる文であり、述語は対象を入れると命題になる文である。量化は変数の範囲を固定する操作であり、集合、関係、写像の定義を支える。

証明法と反例

proof method counterexample

離散数学では、定義から結論までの距離をできるだけ短くすることが重要である。式変形よりも、「どの定義を開けばよいか」を選ぶ力が問われる。そこで、基本的な証明の型を整理する。

講義

→ 命題・述語と量化

lecture

math

discrete-math

<https://study.bem130.com/lecture/math/discrete-math/命題・述語と量化-講義/>

1 直接証明

direct proof

直接証明は、仮定から定義を順に使って結論を導く方法である。

たとえば $A \subseteq B$ と $B \subseteq C$ から $A \subseteq C$ を示すには、包含関係の定義を開く。任意の x を取り、 $x \in A$ と仮定する。すると $A \subseteq B$ より $x \in B$ 、さらに $B \subseteq C$ より $x \in C$ である。したがって $A \subseteq C$ である。

2 対偶証明

proof by contraposition

対偶証明は、

$$P \Rightarrow Q$$

の代わりに

$$\neg Q \Rightarrow \neg P$$

を示す方法である。両者は同値である。

ここでの単射は、後の写像の章を先取りする例である。この段階では、対偶の形を見るために「 $f(x) = f(y)$ なら $x = y$ 」という条件だけを使う。

単射の証明では、対偶が自然に使えることが多い。 $f: A \rightarrow B$ が単射であることは $f(x) = f(y) \Rightarrow x = y$ であり、その対偶は $x \neq y \Rightarrow f(x) \neq f(y)$ である。

→ 講義

単射・全射・全単射

lecture

math

discrete-math

<https://study.bem130.com/lecture/math/discrete-math/単射・全射・全単射-講義/>

3 背理法

proof by contradiction

背理法 は、結論の否定を仮定して矛盾を導く方法である。

proof by contradiction

次の例は、後続の半順序関係の先取りである。ここでは、半順序集合の全体理論は使わず、必要な仮定だけを明示して使う。すなわち、最大元とは任意の $x \in P$ に対して $x \leq a$ を満たす元 a であり、反対称性とは $a \leq b$ かつ $b \leq a$ なら $a = b$ となる性質である。

たとえば「最大元が存在すれば、それは一意である」を示す。半順序集合 P に最大元 a と b があると仮定する。最大元の定義より、 $a \leq b$ かつ $b \leq a$ である。反対称性より $a = b$ である。したがって異なる2つの最大元は存在しない。

背理法 では、結論の否定を仮定し、既知の定義や仮定と両立しない矛盾を導く。結論そのものを仮定してしまうと証明にならない。

→ 講義

半順序関係と全順序関係

lecture

math

discrete-math

<https://study.bem130.com/lecture/math/discrete-math/半順序関係と全順序関係-講義/>

4 場合分け

proof by cases

場合分けは、対象が有限個の型に分かれるときに使う。集合演算では、元がどの集合に属するかで場合分けすることが多い。

たとえば

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

示すには、任意の x について $x \in A$ 、 $x \in B$ 、 $x \in C$ の真偽を追う。左辺に属することは $x \in A$ and ($x \in B$ or $x \in C$) であり、これは ($x \in A$ and $x \in B$) or ($x \in A$ and $x \in C$) と同値である。

5 反例

counterexample

反例 は、全称命題を否定するための 1 つの例である。

「すべての関係は対称である」という主張は偽である。 $A = \{1, 2\}$ 上の関係

$$R = \{(1, 2)\}$$

を考えると、 $(1, 2) \in R$ だが $(2, 1) \notin R$ である。したがって R は対称性を持たない。

反例では、対象が定義の条件を満たしていることと、結論が壊れていることを両方明示する必要がある。

反例 は、仮定をすべて満たしながら結論を破る具体例でなければならない。仮定を満たさない例は、主張の失敗を示さない。

6 演習リンクとまとめ

→ [基本演習](#) [論理と証明法](#) [exercise](#) [math](#) [discrete-math](#)

<https://study.bem130.com/exercise/math/discrete-math/論理と証明法-基本演習/>

証明では、定義を開き、必要な量化を明確にし、どの型の議論を使うかを選ぶ。反例 は「成り立たない」ことを示す強力な方法だが、反例の条件確認を省略してはいけない。

演習では、直接証明、対偶、背理法、場合分け、反例 のどれを使っているかを明示すると、仮定と結論の対応を追いやすい。

数学的帰納法と再帰的定義

離散数学では、対象を1つずつ増やす議論がよく表れる。数学的帰納法は、そのような「最初に成り立ち、次へ進めるなら、すべてで成り立つ」という構造を証明にしたものである。

数学的帰納法は、自然数に沿って命題を全体へ広げる証明法である。再帰的定義は、最初の値と前の値から次を決める規則で対象を定義する。

1 数学的帰納法の形

自然数 n に関する命題 $P(n)$ をすべての $n \geq n_0$ で示したいとする。このとき、次の2つを示す。

$$P(n_0)$$

$$P(k) \Rightarrow P(k+1) \quad (k \geq n_0)$$

最初の式を基底段階、次の式を帰納段階という。帰納段階で仮定する $P(k)$ を帰納法の仮定という。

基底と帰納法のステップの両方が必要である。いくつかの例を確認するだけでは全ての n を示したことにならず、仮定 $P(n)$ から次の $P(n+1)$ を導く論理が必要である。

2 なぜこれで十分か

数学的帰納法は、ドミノ倒しの比喻で理解できる。最初のドミノが倒れることが基底段階であり、任意のドミノが倒れたら次も倒れることが帰納段階である。すると、すべてのドミノが倒れる。

厳密には、自然数の整列性と同値な原理として理解できる。もし成り立たない n があれば、その中で最小のものが存在する。その最小値は基底段階ではなく、直前までは成り立つはずなので、帰納段階と矛盾する。

基底が最初の到達点を与え、帰納法のステップが一步先へ進める規則を与える。有限回この規則を繰り返すことで、任意の自然数に到達する。

3 具体例：有限集合の冪集合の大きさ

この例は、べき集合の正式な講義より前に置く帰納法の例である。ここでは最小限として、 $|A|$ は A の元の個数、 $\mathcal{P}(A)$ は A の部分集合全体の集合、有限集合は元を n 個もつ集合として扱う。

$|A| = n$ のとき、 $|\mathcal{P}(A)| = 2^n$ を示す。

基底段階として、 $n = 0$ のとき $A = \emptyset$ であり、

$$\mathcal{P}(\emptyset) = \{\emptyset\}$$

なので $|\mathcal{P}(A)| = 1 = 2^0$ である。ここで $n = 0$ の場合を明示することが重要である。空集合は例外ではなく、公式の出発点である。

帰納段階として、 $|A| = k$ のとき $|\mathcal{P}(A)| = 2^k$ と仮定する。新しい元 $a \notin A$ を加えた集合 $A' = A \cup \{a\}$ を考える。 A' の部分集合は、 a を含まないものと含むものに分かれる。含まないものは A の部分集合であり、含むものは $B \cup \{a\}$ の形で $B \subseteq A$ と一対一に対応する。したがって

$$|\mathcal{P}(A')| = 2^k + 2^k = 2^{k+1}$$

である。

→ [講義](#) [べき集合の基本](#) [lecture](#) [math](#) [discrete-math](#)

<https://study.bem130.com/lecture/math/discrete-math/べき集合の基本-講義/>

4 再帰的定義

再帰的定義は、最初の対象と、次の対象を作る規則によって全体を定める方法である。

たとえば数列 a_n を

$$a_0 = 1, \quad a_{n+1} = 2a_n + 1$$

再帰的定義 (recursive definition) で定めることは再帰的定義である。ここで a_0 を指定しないと、次を作る規則だけでは値が定まらない。

再帰的定義 (recursive definition) では、次を必ず確認する。

- 初期値 (しよきち) が指定されている。

- 次を作る規則 (つぎ) が明確 (めいかく) である。

- どの範囲 (はんい) の n に対して規則 (たい) を使う (きそく) かが明確 (めいかく) である。

再帰的定義 (recursive definition) では、初期値 (しよきち) と再帰規則 (さいききそく) が不足 (ふそく) していないかを確認 (かくにん) する。同じ初期値 (おなじしよきち) と規則 (きそく) から得られる対象 (たいしょう) が一意 (いちい) であることは、しばしば数学的帰納法 (すうがくてききのうほう) で示 (しめ) せる。

5 注意 (ちゅうい)

帰納法 (きのかうほう) の仮定 (かてい) は、すべての n について証明 (しょうめい) したい命題 (めいだい) そのものを一度 (いちど) に仮定 (かてい) することではない。任意 (にんい) の 1 つの k について一時的 (いちじてき) に仮定 (かてい) し、次の場合 (つぎ) を示 (ばあい) すため (しめ) だけに使う (つか) 。

6 関連リンク (かんれん)

→ [講義 \(こうぎ\)](#) [べき集合の基本 \(べきしゅうごうのきほん\)](#) [lecture](#) [math](#) [discrete-math](#)
<https://study.bem130.com/lecture/math/discrete-math/べき集合の基本-講義/>

→ [基本演習 \(きほんえんじゆ\)](#) [論理と証明法 \(ろんりとうしょうめいほう\)](#) [exercise](#) [math](#) [discrete-math](#)
<https://study.bem130.com/exercise/math/discrete-math/論理と証明法-基本演習/>

7 まとめ

数学的帰納法 (すうがくてききのうほう) は、自然数上 (しぜんすう) の命題 (めいだい) を扱 (あつか) う基本的 (きほん) な証明法 (しょうめいほう) である。再帰的定義 (さいきてきていぎ) は、有限列 (ゆうげんれつ) 、木 (き) 、グラフ (ぐらふ) 、計算 (けいさん) 手順 (てじゆん) の定義 (ていぎ) で頻繁 (ひんぱん) に使 (つか) われる。

集合の基本

set

1 導入

集合を学ぶときに最初に固定すべき問いは、「何を同じ対象の集まりとして扱い、何を別の集まりとして扱うか」である。集合は単なる袋ではない。条件を満たす対象を集め、含まれるかどうかで議論するための言語である。

この講義では、元、所属、空集合、部分集合、外延性を整理する。ここを曖昧にすると、後の関係、写像、べき集合で「元なのか、部分集合なのか」が混乱する。

集合では順序や重複ではなく、所属するかどうかだけが意味を持つ。したがって、同じ元を持つなら、書き方や並び順が違っていても同じ集合である。

2 用語と定義

集合とは、対象を集めたものである。集合 A に対象 x が含まれることを

$$x \in A$$

と書き、 x を A の元という。 $x \notin A$ は、 x が A の元ではないことを表す。

空集合 \emptyset は、元を1つも持たない集合である。空集合は「存在しない集合」ではなく、「元が存在しない集合」である。

部分集合は、包含を表す。 $A \subseteq B$ とは、すべての x について

$$x \in A \implies x \in B$$

が成り立つことである。ここで $A \subseteq B$ は $A = B$ を許す。 $A \subset B$ は $A \subseteq B$ かつ $A \neq B$ を表す。

3 方針

集合を扱うときは、図や直感だけで判断しない。まず「任意の元 x を取る」と考え、 $x \in A$ という条件を別の条件へ変形する。

この方針は単純だが、強力である。集合の等式 $A = B$ を示すには、

$$A \subseteq B \text{ and } B \subseteq A$$

を示せばよい。これは、両方の集合が同じ元を持つことを確認する方法である。

包含を示すときは、任意の x を取って所属条件を追う。具体例をいくつか調べることは予想には役立つが、証明には全ての元を扱う論理が必要である。

4 直感的な説明

集合は、名札の付いた対象の集まりとして考えるとよい。 $x \in A$ は「 x に A の名札が付いている」という主張である。 $A \subseteq B$ は「 A の名札が付いているものには、必ず B の名札も付いている」という主張である。

この見方では、空集合は何も入っていない箱である。したがって、空集合は任意の集合 A の部分集合である。なぜなら、 $x \in \emptyset$ となる x が存在しないため、「 $x \in \emptyset$ なら $x \in A$ 」という条件文に反例が存在しないからである。

5 厳密な説明

集合の同一性は、外延性で決まる。外延性とは、すべての x について

$$x \in A \iff x \in B$$

が成り立つなら $A = B$ と判断する、という原理である。つまり、集合は作り方ではなく、含まれる元によって決まる。

たとえば

$$A = \{1, 2, 3\}, \quad B = \{3, 2, 1, 1\}$$

と書いても、 $A = B$ である。集合では順序と重複は記録されない。ここで順序を記録したいなら順序対や列を用いる。重複を記録したいなら多重集合を用いる。

外延性により、2つの集合が同じ元を持つなら同じ集合である。名前や記法ではなく、所属条件を比較することが厳密な判断になる。

6 例題：部分集合を定義から確認する

6.1 問題

$A = \{2, 4, 6\}$ 、 $B = \{n \in \mathbb{Z} \mid n \text{ は偶数で } 1 \leq n \leq 6\}$ とする。 $A = B$ を示せ。

6.2 解説

集合の等式は、両側の包含で示す。

まず $x \in A$ とする。このとき x は 2, 4, 6 のいずれかである。いずれも整数であり、偶数であり、 $1 \leq x \leq 6$ を満たす。したがって $x \in B$ である。よって $A \subseteq B$ である。

逆に $x \in B$ とする。このとき x は $1 \leq x \leq 6$ を満たす偶数である。したがって x は 2, 4, 6 のいずれかであり、 $x \in A$ である。よって $B \subseteq A$ である。

両方の包含が成り立つので $A = B$ である。この例で確認しているのは、集合は表示の仕方ではなく、元の一致で比較するという点である。

7 変わるものと保存されるもの

そうき みかた 操作・見方	か 変わるもの	ほぞん 保存されるもの
きほう へんかん 内包的記法への変換 set-builder notation	ひょうじ しかた 表示の仕方	げん ぜんたい 元の全体 element
きほう へんかん 外延的記法への変換 roster notation	れっきょ しかた 列挙の仕方	しゅうごう 集合そのもの set
じゅんじょ い か 順序の入れ替え	か じゅんばん 書かれた順番	しゅうごう 集合そのもの set
ちようふく れっきょ 重複した列挙	み め 見たい目	げん うむ 元の有無 element

変えられるのは表記や条件の書き方であり、保存したいのは各対象について所属の真偽が一致することである。この視点が、後の集合演算や写像の像の理解にも続く。

8 見分け方

- 「 $x \in A$ かどうか」を問うなら、集合の議論である。
- 「 $A \subseteq B$ かどうか」を問うなら、任意の $x \in A$ から $x \in B$ を導く。
- 「 $A = B$ かどうか」を問うなら、 $A \subseteq B$ と $B \subseteq A$ を別々に確認する。
- 順序や重複が重要なら、集合だけでは情報が不足する。

迷ったら、候補の元 x が左辺と右辺のどちらに入るかを条件で書き換える。包含でないことは1つの反例で示せるが、等号には両方向の包含が必要である。

9 演習リンク

→ 基本演習 集合と集合演算 [exercise](#) [math](#) [discrete-math](#)

<https://study.bem130.com/exercise/math/discrete-math/集合と集合演算-基本演習/>

10 かんれん 関連リンク

→ 講義 集合演算と包含関係 lecture math discrete-math

<https://study.bem130.com/lecture/math/discrete-math/集合演算と包含関係-講義/>

→ 講義 直積集合の基本 lecture math discrete-math

<https://study.bem130.com/lecture/math/discrete-math/直積集合の基本-講義/>

→ 講義 べき集合の基本 lecture math discrete-math

<https://study.bem130.com/lecture/math/discrete-math/べき集合の基本-講義/>

集合演算と包含関係

しゅうごうえんざん ほうがんかんけい
set operation inclusion relation

1 導入

集合演算で重要なのは、図形の領域を塗ることではなく、元が満たす条件を論理的に変形することである。和集合は「または」、共通部分は「かつ」、補集合は「でない」に対応する。

この対応を先に押さえると、ド・モルガンの法則や分配法則は暗記ではなく、条件の変形として導かれる。

和集合・共通部分・補集合は、それぞれ「または」「かつ」「ではない」という論理に対応する。とくに補集合は全体集合を固定してはじめて意味が決まる。

2 用語と定義

集合 A, B に対して、和集合、共通部分、差集合を

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ または } x \in B\}$$

$$A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ かつ } x \in B\}$$

$$A \setminus B = \{x \mid x \in A \text{ かつ } x \notin B\}$$

で定義する。

全体集合 U を固定したとき、 A の補集合は

$$A^c = U \setminus A = \{x \in U \mid x \notin A\}$$

である。補集合は、どの全体集合を見ているかに依存する。この前提を省略すると、同じ A でも A^c が変わる。

3 方針

集合演算の式を証明するときは、任意の x を取り、 $x \in$ で始まる条件へ翻訳する。たとえば $x \in A \cap (B \cup C)$ は

$$x \in A \text{ かつ } (x \in B \text{ または } x \in C)$$

という命題である。ここから論理の分配法則を用いれば、

$$(x \in A \text{ かつ } x \in B) \text{ または } (x \in A \text{ かつ } x \in C)$$

となる。これは $x \in (A \cap B) \cup (A \cap C)$ と同値である。

→ 講義 集合の基本 lecture math discrete-math

<https://study.bem130.com/lecture/math/discrete-math/集合の基本-講義/>

4 直感的な説明

集合演算は、条件の結合を集合の形で見える方法である。 $A \cup B$ は「 A の名札または B の名札を持つもの」、 $A \cap B$ は「 A と B の両方の名札を持つもの」、 $A \setminus B$ は「 A の名札は持つが B の名札は持たないもの」である。

この見方では、ド・モルガンの法則

$$(A \cup B)^c = A^c \cap B^c, \quad (A \cap B)^c = A^c \cup B^c$$

は自然である。「 A または B に入る」の否定は、「 A に入らず、かつ B に入らない」である。「 A かつ B に入る」の否定は、「 A に入らない、または B に入らない」である。

5 厳密な説明

$A \subseteq B$ とは、任意の x について $x \in A \Rightarrow x \in B$ が成り立つことである。したがって、包含関係の証明では、出発点と到達点を明確にする。

たとえば $A \cap B \subseteq A$ は、任意の $x \in A \cap B$ を取ると $x \in A$ かつ $x \in B$ なので、とくに $x \in A$ である、という一文で証明できる。

一方、 $A \subseteq A \cup B$ は、任意の $x \in A$ を取ると、 $x \in A$ または $x \in B$ が成り立つため $x \in A \cup B$ である、という構造である。ここで $x \in B$ は不要である。「または」は片方が真なら真である。

6 例題：ド・モルガンの法則を元で証明する

De Morgan's laws element

6.1 問題

全体集合 U の部分集合 A, B について、 $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$ を示せ。

6.2 解説

任意の $x \in U$ を取る。すると

$$x \in (A \cup B)^c \iff x \notin A \cup B$$

である。和集合の定義より、 $x \notin A \cup B$ は「 $x \in A$ または $x \in B$ ではない」という意味である。したがって

$$x \notin A \cup B \iff (x \notin A \text{ かつ } x \notin B)$$

である。これは

$$x \in A^c \text{ かつ } x \in B^c$$

と同値であり、すなわち $x \in A^c \cap B^c$ である。任意の x について同値が成り立つので、外延性より $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$ である。

7 変わるものと保存されるもの

操作	かわるもの	ほぞん 保存されるもの
$A \cup B$	条件を「または」で緩める	A と B の元はすべて含む

$A \cap B$	じょうけん 条件を「かつ」で厳しくする	りょうほう ぞく げん のこ 両方に属する元だけを残す element
$A \setminus B$	ぞく げん のぞ Bに属する元を除く element	そと げん ついか Aの外の元は追加しない element
A^c	してん そとがわ うつ 視点をAの外側へ移す	ぜんたいしゅうごう こてい 全体集合Uは固定する universal set

和集合と 共通部分は 所属条件を 組み 合わせる 操作である。一方、補集合は 全体集合に 依存し、
ド・モルガンの法則では論理結合の向きが入れ替わる。
De Morgan's laws

8 見分け方

- 条件に「または」が表れたら、和集合を考える。
union
- 条件に「かつ」が表れたら、共通部分を考える。
intersection
- 条件に「でない」が表れたら、補集合または差集合を考える。
complement set difference
- 補集合を用いるときは、全体集合が何かを確認する。
complement universal set

見分けるときは、任意の x について左辺の所属条件と右辺の所属条件を並べる。Venn図は予想を助けるが、
証明では条件の同値変形を書く。
Venn diagram

9 証明補足：集合演算が包含を保つ理由

ここでは、保存という言葉をもとに具体的に証明する。仮定は
preservation

$$A \subseteq B$$

である。このとき、任意の集合 C について

$$A \cup C \subseteq B \cup C, \quad A \cap C \subseteq B \cap C$$

が成り立つ。

証明する。まず $x \in A \cup C$ とする。このとき $x \in A$ または $x \in C$ である。 $x \in A$ なら、 $A \subseteq B$ より $x \in B$ である。したがって $x \in B \cup C$ である。 $x \in C$ の場合も $x \in B \cup C$ である。よって $A \cup C \subseteq B \cup C$ である。
ばあい

つぎに $x \in A \cap C$ とする。このとき $x \in A$ かつ $x \in C$ である。 $A \subseteq B$ より $x \in B$ なので、 $x \in B \cap C$ である。よって $A \cap C \subseteq B \cap C$ である。

補集合では向きが反転する。全体集合 U を固定すると、

$$A \subseteq B \implies U \setminus B \subseteq U \setminus A$$

である。 $x \in U \setminus B$ なら $x \notin B$ である。もし $x \in A$ なら $A \subseteq B$ より $x \in B$ となり矛盾する。したがって $x \notin A$ であり、 $x \in U \setminus A$ である。

この証明は、集合演算を記号の操作としてではなく、要素が属するかどうかの条件として読む練習でもある。

10 演習リンク

→ 基本演習 集合と集合演算 exercise math discrete-math

<https://study.bem130.com/exercise/math/discrete-math/集合と集合演算-基本演習/>

11 関連リンク

→ 講義 集合の基本 lecture math discrete-math

<https://study.bem130.com/lecture/math/discrete-math/集合の基本-講義/>

→ 講義 直積集合の基本 lecture math discrete-math

<https://study.bem130.com/lecture/math/discrete-math/直積集合の基本-講義/>

→ 講義 べき集合の基本 lecture math discrete-math

<https://study.bem130.com/lecture/math/discrete-math/べき集合の基本-講義/>

集合族と添字集合

family of sets index set

1 導入

集合族を導入する理由は、2つや3つの集合だけでなく、多数の集合を一括して扱うためである。たとえば、开区間 $(-1/n, 1/n)$ を $n = 1, 2, 3, \dots$ について考えるとき、 $A_n = (-1/n, 1/n)$ と置いて「 A_n の全体」として扱うほうが見通しがよい。

ここで重要なのは、添字は集合そのものではなく、集合を指す名札であるという点である。

集合族では、添字は集合を呼び出すための名前であり、添字そのものが対象集合の元であるとは限らない。この区別により、同じ形の集合を規則的に扱える。

2 用語と定義

添字集合 I に対して、各 $i \in I$ に集合 A_i が対応しているとき、 $(A_i)_{i \in I}$ を集合族という。

集合族 $(A_i)_{i \in I}$ の和集合を

$$\bigcup_{i \in I} A_i = \{x \mid \text{ある } i \in I \text{ が存在して } x \in A_i\}$$

で定義する。集合族の共通部分を

$$\bigcap_{i \in I} A_i = \{x \mid \text{すべての } i \in I \text{ について } x \in A_i\}$$

で定義する。

3 方針

添字付き和集合では、「ある i が存在する」を探す。添字付き共通部分では、「すべての i について」を確認する。この存在と全称の違いが、証明の進め方を決める。

たとえば $x \in \bigcup_{i \in I} A_i$ と分かっているなら、ある $i_0 \in I$ が存在して $x \in A_{i_0}$ である。一方、 $x \in \bigcap_{i \in I} A_i$ と分かっているなら、任意の $i \in I$ について $x \in A_i$ である。

4 直感的な説明

集合族は、引き出しに番号を付けて、各引き出しに集合を入れている状況として見られる。和集合は、どれか1つの引き出しに入っていれば採用する。共通部分は、すべての引き出しに入っているものだけを採用する。

この見方では、和集合は条件を緩める操作であり、共通部分は条件を厳しくする操作である。

添字集合が空の場合は特に注意する。空の和集合は集める元がないので空集合になり、空の共通部分は文脈の全体集合を使う約束で扱う。

5 厳密な説明：空の添字集合

$I = \emptyset$ の場合は境界例である。和集合 $\bigcup_{i \in \emptyset} A_i$ は、入るための「ある $i \in \emptyset$ 」が存在しないため、空集合になる。

共通部分 $\bigcap_{i \in \emptyset} A_i$ は、議論している全体集合 U を固定しているなら U と約束することが多い。これは「すべての $i \in \emptyset$ について $x \in A_i$ 」という条件が、反例を持たないためである。

6 例題：添字付き共通部分

indexed intersection

6.1 問題

$A_n = \{m \in \mathbb{Z} \mid n \text{ は } m \text{ を 割り 切る}\}$ とする。 $\bigcap_{n=1}^3 A_n$ を言葉で説明せよ。

6.2 解説

$m \in \bigcap_{n=1}^3 A_n$ とは、 $m \in A_1$ 、 $m \in A_2$ 、 $m \in A_3$ の全部が成り立つという意味である。つまり m は 1、2、3 のすべてで割り切れる整数である。

したがって $\bigcap_{n=1}^3 A_n$ は 6 の倍数全体である。この例では、共通部分が複数の条件を同時に満たす元を抽出する操作であることを確認している。

7 見分け方と関連リンク

- 同じ形の集合が多数現れるなら、集合族として整理する。
- 「どれか 1 つに属する」なら \cup を用いる。
- 「すべてに属する」なら \cap を用いる。
- 添字集合が空の場合は、和集合と共通部分で扱いが異なる。

→ 基本演習 集合と集合演算 exercise math discrete-math

<https://study.bem130.com/exercise/math/discrete-math/集合と集合演算-基本演習/>

→ 講義 集合演算と包含関係 lecture math discrete-math

<https://study.bem130.com/lecture/math/discrete-math/集合演算と包含関係-講義/>

→ 講義

直積集合の基本

lecture

math

discrete-math

<https://study.bem130.com/lecture/math/discrete-math/直積集合の基本-講義/>

ちよくせきしゅうごう きほん
直積集合の基本
Cartesian product

どうにゅう
1 導入

直積集合で最初に理解すべきことは、「複数の選択を順序つきで一つの対象にする」操作だという点である。
Cartesian product
る。Aから1つ、Bから1つ選んだ結果を、単にa,bと並べるのではなく、順序対(a,b)として記録する。
object
ordered pair

この順序が重要である。(a,b)と(b,a)は、一般には別の対象である。したがって直積集合は、関係、写像、
object
Cartesian product
relation
map
座標、状態空間の共通の土台になる。
coordinate
state space

順序対では成分の順番が情報の一部である。そのため、一般にAimesBとBimesAは同じではなく、第
ordered pair
1成分と第2成分の役割を区別する。
せいぶん
だい
せいぶん
やくわり
くべつ

ようご ていぎ
2 用語と定義

しゅうごう たい ちよくせきしゅうごう
集合A,Bに対して、直積集合A×Bを
set Cartesian product

$$A \times B = \{(a, b) \mid a \in A, b \in B\}$$

ていぎ せいぶん じゅんじょつたい だい せいぶん だい せいぶん
で定義する。ここで(a,b)は順序対であり、第1成分がa、第2成分がbである。
ordered pair

いっぽん ちよくせきしゅうごう
より一般に、A₁, A₂, ..., A_nの直積集合は
Cartesian product

$$A_1 \times \dots \times A_n = \{(a_1, \dots, a_n) \mid a_i \in A_i \text{ for every } i\}$$

じゅんじょづ ぐみ あつ しゅうごう
である。これは順序付き組を集めた集合である。
ordered tuple set

ほうしん
3 方針

ちよくせきしゅうごう あつか げん あたい じゅんじょつたい ぐみ いしき
直積集合を扱うときは、元が1つの値ではなく、順序対や組であることを意識する。したがってx∈A×
Cartesian product
か お と だ
Bと書かれていたら、xを(a,b)と置き、a∈Aとb∈Bを取り出す。

この方針は、後で関係を理解するときそのまま使う。関係は $A \times B$ の部分集合である。つまり、関係は「どの順序対を採用するか」という選択である。

→ 講義 関係の基本

<https://study.bem130.com/lecture/math/discrete-math/関係の基本-講義/>

4 直感的な説明

$A \times B$ は、表の行と列を作る操作として見ると理解しやすい。 A の元を行の見出し、 B の元を列の見出しにすると、各マスが1つの順序対 (a, b) に対応する。

たとえば $A = \{1, 2\}$ 、 $B = \{x, y, z\}$ なら

$$A \times B = \{(1, x), (1, y), (1, z), (2, x), (2, y), (2, z)\}$$

である。この例では $|A| = 2$ 、 $|B| = 3$ なので、 $|A \times B| = 6$ である。有限集合では一般に

$$|A \times B| = |A| |B|$$

が成り立つ。選択の段階が2つあり、第1選択に $|A|$ 通り、第2選択に $|B|$ 通りあるためである。

5 厳密な説明

順序対で本質的なのは、次の同値性である。

$$(a, b) = (a', b') \iff (a = a' \text{ かつ } b = b')$$

この性質により、第1成分と第2成分を別々に比較できる。直積集合の等式や包含を示すときも、元を順序対として分解する。

境界例も重要である。 $A = \emptyset$ または $B = \emptyset$ なら、 $A \times B = \emptyset$ である。なぜなら、 (a, b) を作るには $a \in A$ と $b \in B$ の両方が必要であり、片方の集合に元が存在しなければ順序対を作れないからである。

順序対の等号は成分ごとに判定する。 $(a, b) = (a', b')$ なら $a = a'$ かつ $b = b'$ であり、直積集合への所属も各座標が正しい集合に入ると同時に要求する。

6 例題：直積集合と順序

れいだい ちよくせきしゅうごう じゅんじょ
Cartesian product

6.1 問題

もんだい

$A = \{0, 1\}$ 、 $B = \{1, 2\}$ とする。 $A \times B$ と $B \times A$ を書き出し、両者が一般に等しくないことを確認せよ。

6.2 解説

かいせつ

ていぎ
定義より

$$A \times B = \{(0, 1), (0, 2), (1, 1), (1, 2)\}$$

である。一方、

$$B \times A = \{(1, 0), (1, 1), (2, 0), (2, 1)\}$$

である。たとえば $(0, 1) \in A \times B$ だが、 $(0, 1) \notin B \times A$ である。したがって $A \times B \neq B \times A$ である。

ここで確認しているのは、直積集合が単なる組み合わせではなく、順序を記録する操作であるという点である。

7 変わるものと保存されるもの

か ほぞん

操作	変わるもの	保存されるもの
$A \times B$ から $B \times A$ への入れ替え	成分の位置	選んだ材料の集合
$A \times B$ の部分集合を取る	採用する順序対	成分が A と B から来ること
$A_1 \times \dots \times A_n$ に拡張する	成分の数	各成分が指定された集合から来ること

片方の因子を変えると、表でいえば行または列が変わる。一方、各元が順序対であり、第1成分と第2成分を区別することは保存される。

8 見分け方

• 複数の選択を同時に記録するなら、直積集合を考える。
Cartesian product

• 順序が意味を持つなら、順序対として扱う。
ordered pair

• 関係を定義するなら、まず母体となる $A \times B$ を確認する。
relation

• 写像を定義するなら、 $A \times B$ の内「各 $a \in A$ に対して第 2 成分が一意」な部分集合を考える。
map subset

判定では、まず対象が順序対になっているかを見る。次に第 1 成分が A に、第 2 成分が B に入っているかを確認する。どちらか 1 つでも外れれば $A \times B$ の元ではない。
element

9 証明補足：直積が包含を保つ条件

直積集合は各成分の包含を保存する。つまり
Cartesian product

$$A \subseteq A', \quad B \subseteq B' \implies A \times B \subseteq A' \times B'$$

である。

証明する。 $(a, b) \in A \times B$ とする。この意味は $a \in A$ かつ $b \in B$ である。 $A \subseteq A'$ と $B \subseteq B'$ より $a \in A'$ かつ $b \in B'$ である。したがって $(a, b) \in A' \times B'$ である。

逆向きには空集合の注意が必要である。もし $A \times B \subseteq A' \times B'$ で、さらに A と B がどちらも空でないなら、 $A \subseteq A'$ かつ $B \subseteq B'$ が従う。たとえば $a \in A$ を取り、 B が空でないので $b \in B$ を取る。すると $(a, b) \in A \times B \subseteq A' \times B'$ だから $a \in A'$ である。同じ議論で $B \subseteq B'$ も分かる。

この非空の仮定を落とすと、 $A \times \emptyset = \emptyset$ となり、左辺だけから A の情報を読み取れない。

10 えんしゅう 演習リンク

→ 基本演習 直積集合とべき集合 exercise math discrete-math

<https://study.bem130.com/exercise/math/discrete-math/直積集合とべき集合-基本演習/>

11 かんれん 関連リンク

→ 講義 関係の基本 lecture math discrete-math

<https://study.bem130.com/lecture/math/discrete-math/関係の基本-講義/>

→ 講義 写像の基本 lecture math discrete-math

<https://study.bem130.com/lecture/math/discrete-math/写像の基本-講義/>

べき集合の基本

power set

1 導入

べき集合で重要なのは、集合の元ではなく、部分集合そのものを新しい元として扱う視点である。 A の元を選ぶか選ばないかという全ての選択を集めたものがべき集合である。

この視点は、場合の数、論理、状態空間、ブール束に接続する。べき集合は、集合を1段「対象化」する操作である。

空集合と A 自身は、いつも $\mathcal{P}(A)$ の元である。 A の各元について「選ぶ・選ばない」を独立に決めるので、有限集合では個数が $2^{|A|}$ になる。

2 用語と定義

集合 A のべき集合 $\mathcal{P}(A)$ を

$$\mathcal{P}(A) = \{B \mid B \subseteq A\}$$

で定義する。つまり、 $\mathcal{P}(A)$ の元は、 A の部分集合である。

$x \in A$ と $B \in \mathcal{P}(A)$ は違う種類の主張である。前者は x が A の元であるという主張であり、後者は B が A の部分集合であるという主張である。

3 方針：個数を数える

べき集合を理解するときは、各元について「選ぶ」または「選ばない」の2択を考える。有限集合 A で $|A| = n$ なら、各元について2通りの選択があるため、

$$|\mathcal{P}(A)| = 2^n$$

となる。この式は、べき集合という名前の理由でもある。

講義

→ 場合の数と順列・組合せ

lecture

math

probability

<https://study.bem130.com/lecture/math/probability/場合の数と順列・組合せ-講義/>

4 直感的な例

$A = \{a, b, c\}$ とする。べき集合は、 a, b, c それぞれについて採用するかどうかを決めた結果の全体である。

$$\mathcal{P}(A) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{a, b, c\}\}$$

である。 \emptyset も A の部分集合であり、 A 自身も A の部分集合であるため、どちらも $\mathcal{P}(A)$ の元である。

5 厳密な使い方

$B \in \mathcal{P}(A)$ は、定義より $B \subseteq A$ と同値である。したがって、べき集合に関する証明では、

$$B \in \mathcal{P}(A) \iff B \subseteq A$$

を最初に展開するのが基本である。

たとえば $A \subseteq C$ なら $\mathcal{P}(A) \subseteq \mathcal{P}(C)$ である。任意の $B \in \mathcal{P}(A)$ を取ると、 $B \subseteq A$ であり、 $A \subseteq C$ なので、包含の推移性より $B \subseteq C$ である。したがって $B \in \mathcal{P}(C)$ である。

6 境界例：空集合

$A = \emptyset$ の場合を確認する。 \emptyset の部分集合は \emptyset 自身だけであるため、

$$\mathcal{P}(\emptyset) = \{\emptyset\}$$

である。したがって $|\mathcal{P}(\emptyset)| = 1 = 2^0$ であり、個数の公式と整合する。

7 例題：べき集合の元を判定する

れいだい しゅうごう げん はんてい
power set element

7.1 問題

もんだい

$A = \{1, 2\}$ とする。次の主張の真偽を判定せよ。

$$1 \in \mathcal{P}(A), \quad \{1\} \in \mathcal{P}(A), \quad \emptyset \in \mathcal{P}(A)$$

7.2 解説

かいせつ

$\mathcal{P}(A)$ の元は A の部分集合である。1 は A の元ではあるが、部分集合ではないため、 $1 \in \mathcal{P}(A)$ は偽である。

げん ぶぶんしゅうごう げん ぶぶんしゅうごう
element subset element subset

一方、 $\{1\} \subseteq A$ なので、 $\{1\} \in \mathcal{P}(A)$ は真である。また、空集合は任意の集合の部分集合なので、 $\emptyset \in \mathcal{P}(A)$ も真である。

いっぽう しん けうしゅうごう にんい しゅうごう ぶぶんしゅうごう
empty set set subset

しん
も真である。

8 包含順序としてのべき集合

ほうがんにじゅんじょ しゅうごう
inclusion order power set

順序と束の正式な定義は後続で扱う。この節は先取りであり、ここでは包含順序に限って最小限の言葉だけを使う。最小元とは全ての元の下にある元、最大元とは全ての元の上にある元である。2つの元の上限は両方を含む最小の元、下限は両方に含まれる最大の元である。

じゅんじょ そく せいしき ていぎ こうぞく あつか せつ さきど ほうがんにじゅんじょ かぎ さいしゅうげん ことば
lattice つか さいしゅうげん すべ げん した げん さいだいげん すべ げん うえ inclusion order げん げん
least element じょうげん りょうほう ふく さいしゅう げん かげん りょうほう ふく さいだい げん
least upper bound greatest lower bound

$\mathcal{P}(A)$ には、包含 \subseteq によって順序を入れられる。 $B, C \in \mathcal{P}(A)$ に対して、 $B \subseteq C$ なら「 B は C 以下である」と考える。

ほうがんに じゅんじょ い たい いか
inclusion order

この順序では、最小元は \emptyset 、最大元は A である。さらに、 B と C の上限は $B \cup C$ 、下限は $B \cap C$ である。この構造がブール束である。

じゅんじょ さいしゅうげん さいだいげん じょうげん かげん
order least element greatest element least upper bound greatest lower bound
こうぞう そく
Boolean lattice

→ 講義

半順序関係と全順序関係

lecture

math

discrete-math

<https://study.bem130.com/lecture/math/discrete-math/半順序関係と全順序関係-講義/>

→ 講義 束の基本 lecture math discrete-math

<https://study.bem130.com/lecture/math/discrete-math/束の基本-講義/>

9 証明補足：べき集合と包含の同値性

じゅうよう ていり
重要な定理は

$$A \subseteq B \iff \mathcal{P}(A) \subseteq \mathcal{P}(B)$$

である。まず $A \subseteq B$ とする。 $X \in \mathcal{P}(A)$ なら $X \subseteq A$ である。 $A \subseteq B$ なので $X \subseteq B$ であり、 $X \in \mathcal{P}(B)$ である。

ぎやく
逆に $\mathcal{P}(A) \subseteq \mathcal{P}(B)$ とする。 $a \in A$ を任意に取る。このとき $\{a\} \subseteq A$ なので $\{a\} \in \mathcal{P}(A)$ である。仮定より $\{a\} \in \mathcal{P}(B)$ だから $\{a\} \subseteq B$ であり、 $a \in B$ である。よって $A \subseteq B$ である。

10 見分け方と関連リンク

- 「部分集合を全部集める」と書かれていたら、べき集合を考える。
power set
- $B \in \mathcal{P}(A)$ は $B \subseteq A$ に翻訳する。
- $x \in A$ と $\{x\} \in \mathcal{P}(A)$ を区別する。
- $|A| = n$ の有限集合なら、 $|\mathcal{P}(A)| = 2^n$ を使う。

→ 基本演習 直積集合とべき集合 exercise math discrete-math

<https://study.bem130.com/exercise/math/discrete-math/直積集合とべき集合-基本演習/>

→ 講義 集合の基本 lecture math discrete-math

<https://study.bem130.com/lecture/math/discrete-math/集合の基本-講義/>

→ 講義 **集合演算と包含関係** lecture math discrete-math

<https://study.bem130.com/lecture/math/discrete-math/集合演算と包含関係-講義/>

→ 講義 **束の基本** lecture math discrete-math

<https://study.bem130.com/lecture/math/discrete-math/束の基本-講義/>

集合の濃度と可算性

しゅうごう のうど かさんせい
set cardinality countability

1 導入

集合の大きさを比べるとき、有限集合なら元の個数を数えればよい。しかし無限集合では、数え終わることができない。そこで重要になる発想は、「一対一対応を作れるなら同じ大きさで見なす」である。

この見方では、濃度は全単射によって比較される。全単射は余りも重なりもない対応なので、元を1つずつ対応させる数え方の抽象化である。

濃度を比べるときは、見た目の大きさではなく全単射を使う。無限集合では、数え上げられるかどうかと、対角線論法で列挙を破れるかどうか境界になる。

順序上の注意として、写像、単射、全射、全単射の正式な講義は後にある。このページでは、写像を「各入力に出力を1つ割り当てる規則」、単射を「重なりがない」、全射を「余りがない」、全単射を「重なりも余りもない」として最小限に使う。

2 用語と定義

集合 A, B の間に全単射 $A \rightarrow B$ が存在するとき、 A と B は同じ濃度を持つという。

集合 A が有限集合であるとは、ある自然数 n について A と $\{1, 2, \dots, n\}$ の間に全単射が存在することである。 $n = 0$ の場合は、 $A = \emptyset$ に対応する。

集合 A が可算集合であるとは、 A が有限集合であるか、自然数全体 \mathbb{N} と同じ濃度を持つことである。

3 方針

濃度を比較するときは、実際に数えるのではなく、写像を構成する。 $|A| \leq |B|$ と言いたいなら、 A から B への単射を探す。 $|A| \geq |B|$ と言いたいなら、 A から B への全射を探す。 $|A| = |B|$ と言いたいなら、全単射を構成する。

→ 講義 単射・全射・全単射

lecture math discrete-math

<https://study.bem130.com/lecture/math/discrete-math/単射・全射・全単射-講義/>

4 直感的な説明

偶数全体 $2\mathbb{N}$ は、自然数全体 \mathbb{N} の一部である。しかし $n \mapsto 2n$ は \mathbb{N} から $2\mathbb{N}$ への全単射である。したがって、濃度の意味では \mathbb{N} と $2\mathbb{N}$ は同じ大きさである。

これは無限集合の直感が有限集合と異なる点である。有限集合では、真の部分集合は元の個数が少ない。しかし無限集合では、真の部分集合と全体が全単射で対応することがある。

可算とは、自然数で重複なく漏れなく番号を付けられるということである。一方、対角線論法は、どんな一覧を仮定しても、そこに載らない対象を作る。

5 厳密な説明：対角線論法の入口

可算集合は列挙できる集合である。一方、実数の区間 $(0, 1)$ は可算集合ではない。

この事実の基本は対角線論法である。もし $(0, 1)$ の実数を r_1, r_2, r_3, \dots と列挙できたと仮定する。各 r_i の小数表示を並べ、 i 番目の r_i の i 桁目と異なる数字を選んで新しい実数 s を作る。すると s は任意の r_i と i 桁目で異なるため、列挙の中に存在しない。

対角線論法では、任意の列挙を仮定し、 n 番目の対象と n 番目の位置で必ず違う新しい対象を作る。この構成により、その列挙が全射でないことを示す。

6 例題：偶数全体は可算集合である

countable set

6.1 問題

正の偶数全体 $E = \{2, 4, 6, \dots\}$ が $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$ と同じ濃度を持つことを示せ。

6.2 解説

$f: \mathbb{N} \rightarrow E$ を $f(n) = 2n$ で定義する。任意の $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$ について $f(n_1) = f(n_2)$ なら $2n_1 = 2n_2$ である。両辺を非零定数 2 で割って $n_1 = n_2$ を得る。したがって f は単射である。

任意の $e \in E$ を取る。 E の定義より、ある $n \in \mathbb{N}$ が存在して $e = 2n$ である。したがって $f(n) = e$ であり、 f は全射である。よって f は全単射であり、 E と \mathbb{N} は同じ濃度を持つ。

7 見分け方と関連リンク

- 大きさを比較するなら、全単射を探す。
- 数え上げられることを示すなら、自然数からの列挙を作る。
- 数え上げられないことを示すなら、任意の列挙から漏れる元を構成する。
- 有限集合で成り立つ直感が、無限集合でも成り立つとは限らない。

→ 基本演習 集合と集合演算 exercise math discrete-math

<https://study.bem130.com/exercise/math/discrete-math/集合と集合演算-基本演習/>

→ 講義

单射・全射・全单射

lecture

math

discrete-math

<https://study.bem130.com/lecture/math/discrete-math/单射・全射・全单射-講義/>

関係の基本

relation

1 導入

関係を学ぶときの中心の問いは、「対象どうしの結びつきを、どの順序対を採用するかで記録できるか」である。関係は曖昧な言葉ではなく、直積集合の部分集合である。

この定義により、「 a は b と等しい」「 a は b 以下である」「 a は b を割り切る」「 a と b は同じ余りを持つ」のような異なる見た目の主張を、同じ形式で扱える。

この形式化により、言葉の違いではなく、どの順序対が入っているかで性質を判定できる。したがって、後で反射性・対称性・推移性を調べるときも、同じ集合としての見方を使う。

2 用語と定義

集合 A, B に対して、 A から B への関係とは、 $A \times B$ の部分集合である。

$$R \subseteq A \times B$$

と書く。 $(a, b) \in R$ のとき、 a は b と関係 R で結ばれるといい、しばしば

$$aRb$$

と書く。

$A = B$ の場合、 $R \subseteq A \times A$ を A 上の二項関係という。同値関係や順序関係は、どちらも二項関係の特別な場合である。

3 方針

関係を調べるときは、まず母体となる直積集合を確認する。次に、その内採用されている順序対がどれかを確認する。

性質を判定するときには、全ての元について条件が成り立つかを確認する。1例だけで反射性や推移性を証明することはできない。失敗を示すには1つの反例で十分である。

全称条件を示すときは、任意の元から始める。一方、性質が成り立たないことを示すときは、その条件を破る順序対や組を1つ示せばよい。

→ 講義 直積集合の基本

lecture

math

discrete-math

<https://study.bem130.com/lecture/math/discrete-math/直積集合の基本-講義/>

4 直感的な説明

関係は、表のマスに印を付けることとして見るとよい。 $A \times B$ の各順序対 (a, b) は、行 a と列 b の交点に対応する。関係 R は、その表の内「成り立つ」と判断したマスの集合である。

関係を変えるとは、採用する順序対を変えることである。母体となる $A \times B$ を固定している限り、第1成分は A から、第2成分は B から来るという型は保存される。

表の見方は、逆関係では行と列を入れ替えること、関係の合成では中間の元を経由することにも接続する。

5 重要な性質

A 上の二項関係 R に対して、次の性質を考える。

性質	定義	直感
----	----	----

はんしゃせい 反射性 reflexivity	すべての $a \in A$ について aRa	じぶん じぶん むす 自分と自分が結ばれる
たいしょうせい 対称性 symmetry	aRb なら bRa	む ぎゃく な た 向きを逆にしても成り立つ
ほんたいしょうせい 反対称性 antisymmetry	aRb かつ bRa なら $a = b$	そうご むす べつもの ゆる 相互に結ばれる別物を許さない
すいせい 推移性 transitivity	aRb かつ bRc なら aRc	ちゅうけい むす 中継して結べる

たいしょうせい ほんたいしょうせい なまえ に いみ ほんたい
対称性と反対称性は名前が似ているが、意味は反対ではない。
symmetry antisymmetry

たいしょうせい ほんたいしょうせい どうじ な た りょうほう しつぱい とうごう かんけい りょうほう み
対称性と反対称性は同時に成り立つことも、両方とも失敗することもある。等号の関係は両方を満たす
symmetry antisymmetry
てんけいれい なまえ ほんたい せいしつ ほんだん
典型例であり、名前だけで反対の性質だと判断しない。

6 例題：整除関係を判定する

れいだい せいじょかんけい ほんてい
divisibility relation

6.1 問題

もんだい

$A = \{1, 2, 3, 6\}$ 上の関係 R を、 aRb とは「 a が b を割り切る」ことだと定義する。 R が反射性、反対称性、推移性を満たすことを確認せよ。
うえ かんけい わ き ていぎ はんしゃせい ほんたいしょうせい
relation かくにん reflexivity antisymmetry
すいせい み かくにん
transitivity

6.2 解説

かいせつ

反射性について、任意の $a \in A$ に対して $a = a \cdot 1$ なので、 a は a を割り切る。したがって aRa である。
はんしゃせい にんい たい わ き
reflexivity

反対称性について、 aRb かつ bRa とする。すると $b = ak$ 、 $a = bl$ を満たす正の整数 k, l が存在する。したがって $a = akl$ である。 $a \in A$ なので $a \neq 0$ であり、両辺を a で割って $1 = kl$ を得る。 k, l は正の整数なので $k = l = 1$ であり、 $a = b$ である。
ほんたいしょうせい かんけい む せい せいすう そんざい
antisymmetry integer
りょうへん わ え せい せいすう
integer

推移性について、 aRb かつ bRc とする。すると $b = ak$ 、 $c = bl$ と書ける。したがって $c = a(kl)$ であり、 aRc である。
すいせい か
transitivity

7 見分け方と関連リンク

- 「 a と b が結ばれるか」を判定するなら、関係である。
relation
- 同じ集合の中で対象どうしを比較するなら、二項関係である。
set binary relation
- 「同類に分ける」なら同値関係を疑う。
equivalence relation
- 「大小や前後として比較する」なら順序関係を疑う。
order relation

→ 基本演習 関係と同値関係 exercise math discrete-math

<https://study.bem130.com/exercise/math/discrete-math/関係と同値関係-基本演習/>

→ 講義 同値関係と分割 lecture math discrete-math

<https://study.bem130.com/lecture/math/discrete-math/同値関係と分割-講義/>

→ 講義 半順序関係と全順序関係 lecture math discrete-math

<https://study.bem130.com/lecture/math/discrete-math/半順序関係と全順序関係-講義/>

→ 講義 写像の基本 lecture math discrete-math

<https://study.bem130.com/lecture/math/discrete-math/写像の基本-講義/>

関係の合成と閉包

relation composition closure

1 導入

関係を一回だけ確認するのではなく、「関係を続けて使うとどこへ到達できるか」を扱いたい場合がある。たとえば、駅どうしの直通の関係が与えられたとき、乗り換えを許せばどこへ行けるかを知りたい。この発想が関係の合成である。

閉包は、ある性質を満たすために不足している順序対を最小限追加する操作である。

合成では「1回で行ける」と「何回か使えば行ける」ことを区別する。閉包は元の関係を含んだまま性質を満たすようにするので、既存の順序対は失われない。

2 用語と定義：合成

$R \subseteq A \times B$ 、 $S \subseteq B \times C$ を関係とする。合成関係 $S \circ R \subseteq A \times C$ を

$$a(S \circ R)c \iff \text{ある } b \in B \text{ が存在して } aRb \text{ かつ } bSc$$

で定義する。これは「 a から b へ R で進み、 b から c へ S で進める」ことを表す。

3 用語と定義：恒等関係と逆関係

A 上の関係 R に対して、恒等関係を

$$\Delta_A = \{(a, a) \mid a \in A\}$$

と書く。逆関係 R^{-1} は

$$R^{-1} = \{(b, a) \mid (a, b) \in R\}$$

である。

4 閉包とは何か

へいほう なに
closure

はんしゃへいほう はんしゃせい み ひつよう ついか かんけい
reflexive closure reflexivity ordered pair relation
反射閉包は、反射性を満たすために必要な (a, a) を追加した関係である。

$$R_{\text{ref}} = R \cup \Delta_A$$

たいしょうへいほう ぎやくむ じゅんじょつゐ ついか かんけい
symmetric closure ordered pair relation
対称閉包は、逆向きの順序対を追加した関係である。

$$R_{\text{sym}} = R \cup R^{-1}$$

すいへいほう ひつよう く かえ ついか さいしょう すいでき かんけい
transitive closure transitivity relation
推移閉包は、 aRb と bRc から必要になる aRc を繰り返し追加した最小の推移的な関係である。

5 方針

ほうしん

へいほう つく せいしつ み なに ついか ついせき もと かんけい こわ
closure transitive closure relation
閉包を作るときは、「性質を満たすまで何を追加するか」を追跡する。ただし、元の関係を壊してはいけ
ない。閉包は削除ではなく追加の操作である。

けいろ かんけい やじるし ゆうげんかい つづ たど れつ ゆうこう ご げん
path relation directed graph element
ここで経路とは、 aRb 、 bRc のように関係の矢印を有限回続けて辿る列である。有向グラフという語は、元
を点、順序対を矢印として描く見方だけを指す。

はんしゃへいほう たいかくせいぶん ついか たいしょうへいほう やじるし ぎやくむ ついか すいへいほう けいろ とうたつ きき
reflexive closure symmetric closure transitive closure
反射閉包は対角成分を追加し、対称閉包は矢印を逆向きにも追加し、推移閉包は経路で到達できる先の
直接の関係として追加する。

さいしょう ついか へいほう いちぶ もと かんけい ふく もと せいしつ み かんけい
minimal addition relation
最小の追加であることも閉包の一部である。つまり、元の関係を含み、求める性質を満たすどの関係にも、
閉包で追加した順序対は含まれる。

6 直感的な説明

ちよつかんてき せつめい

かんけい ゆうこう み ごうせい ほん やじるし つづ すす すいへいほう なんぼん やじるし
relation composition transitive closure
関係を有向グラフとして見ると、合成は2本の矢印を続けて進むことである。推移閉包は、何本かの矢印
を辿って到達できるなら、直接の矢印も追加したものと考えられる。

みかた すいへいほう とうたつかのうせい きろく かんけい もと かんけい ぼ い すいへいほう なに
transitive closure relation transitive closure
この見方では、推移閉包は到達可能性を記録する関係である。元の関係は「1歩で行ける」、推移閉包は「何
歩かで行ける」を表す。

経路の長さで考えると、反射閉包は長さ 0 の移動を許し、推移閉包は正の長さの経路で到達できる先を直接の関係として加える。

7 例題：推移閉包を作る

7.1 問題

$A = \{1, 2, 3\}$ 上の関係 $R = \{(1, 2), (2, 3)\}$ の推移閉包を求めよ。

7.2 解説

$1R2$ かつ $2R3$ なので、推移性を満たすには $1R3$ が必要である。したがって $(1, 3)$ を追加する。

追加後の関係は

$$R^+ = \{(1, 2), (2, 3), (1, 3)\}$$

である。これ以上新しく追加する順序対はない。よってこれが推移閉包である。

8 証明補足：推移閉包の最小性

関係 R の推移閉包を

$$R^+ = R \cup R^2 \cup R^3 \cup \dots$$

と考える。ここで R^n は R を n 回合成した関係である。

R^+ は R を含む。また、 $(a, b) \in R^+$ 、 $(b, c) \in R^+$ なら、ある $m, n \geq 1$ が存在して $(a, b) \in R^m$ 、 $(b, c) \in R^n$ である。経路を連結すれば $(a, c) \in R^{m+n}$ なので $(a, c) \in R^+$ である。

さらに、 S が $R \subseteq S$ を満たす推移的な関係なら、帰納法で $R^n \subseteq S$ が分かる。よって $R^+ \subseteq S$ であり、 R^+ は R を含む推移的な関係の中で最小である。

9 見分け方と関連リンク

- 関係を続けて使うなら、合成compositionを考える。
かんけい つづ つか ごうせい かんが
- 足りない自己ループを追加するなら、反射閉包reflexive closureである。
た じこ ついか はんしゃへいほう
- 逆向きの矢印を追加するなら、対称閉包symmetric closureである。
ぎゃくむ やじるし ついか たいしょうへいほう
- 到達可能性を直接の関係relationとして記録するなら、推移閉包transitive closureである。
とうたつかのうせい ちよくせつ かんけい きろく すいへいほう

→ 基本演習 関係と同値関係 exercise math discrete-math

<https://study.bem130.com/exercise/math/discrete-math/関係と同値関係-基本演習/>

→ 講義 関係の基本 lecture math discrete-math

<https://study.bem130.com/lecture/math/discrete-math/関係の基本-講義/>

→ 講義 同値関係と分割 lecture math discrete-math

<https://study.bem130.com/lecture/math/discrete-math/同値関係と分割-講義/>

同値関係と分割

equivalence relation partition

1 導入

同値関係の目的は、対象を「同じものと見なす」基準で分類することである。ここで重要なのは、完全に等しいという意味ではなく、今の目的に対して同じ扱いをする、という意味である。

たとえば整数を3で割った余りで分類すると、1, 4, 7 は同じ分類に入る。これは $1 = 4$ という意味ではない。3で割った余りを見る限り同じ、という意味である。

同値関係は、対象を「同じ種類」として分けるための関係である。順序のように上や下を決めるのではなく、同値類という箱へ分類する。

2 用語と定義

集合 A 上の二項関係 \sim が同値関係であるとは、次の3条件を満たすことである。

条件	式	意味
反射性 reflexivity	$a \sim a$	自分は自分と同類である
対称性 symmetry	$a \sim b \Rightarrow b \sim a$	同類であることには向きはない
推移性 transitivity	$a \sim b, b \sim c \Rightarrow a \sim c$	同類の連鎖は同類である

$a \in A$ に対して、 a の同値類を

$$[a] = \{x \in A \mid x \sim a\}$$

で定義する。同値類は、 a と同類と見なされる元を集めた集合である。

同値関係には反射性・対称性・推移性の三つがすべて必要である。そこから得られる分割は、空でない部分集合たちが互いに重ならず、全体を覆う構造である。分割を作る各部分集合は、分割のブロックと呼ばれることがある。

3 方針

同値関係を確認するときは、3条件を別々に証明する。特に推移性は見落としやすい。 $a \sim b$ と $b \sim c$ から $a \sim c$ を導けるかを必ず確認する。

また、同値関係を導入する理由は、集合を同値類に分けるためである。したがって「何が変わるか」よりも、「何を無視して同一視するか」を先に考える。

証明では、三つの性質を別々に確認する。失敗を示すときは、反射性なら aRa が欠ける元、対称性や推移性なら条件を破る組を1つ示せばよい。

→ 講義 関係の基本 lecture math discrete-math

<https://study.bem130.com/lecture/math/discrete-math/関係の基本-講義/>

4 直感的な説明

同値関係は、集合の元に色を付けることとして考えられる。同じ色の元を同類と見なす。反射性は各元が何らかの色を持つこと、対称性は同じ色であることに向きがないこと、推移性は色が途中で変わらないことに対応する。

この色分けが正しくできると、集合は互いに重ならない部分集合に分かれる。この分け方が分割である。

同値類は互いに重ならない箱であり、各元は必ず1つの箱に入る。2つの箱が少しでも重なれば、推移性により実は同じ箱になる。

5 厳密な説明：同値関係から分割へ

同値関係 \sim が与えられると、同値類の集まりは A の分割になる。つまり、次の2つが成り立つ。

1. 任意の $a \in A$ は少なくとも1つの同値類に属する。

2. 2つの同値類は、一致するか、交わらないかのどちらかである。

まず1つ目は、反射性より $a \sim a$ なので $a \in [a]$ である。

つぎに2つ目を示す。 $[a] \cap [b] \neq \emptyset$ とする。このとき、ある x が存在して $x \in [a]$ かつ $x \in [b]$ である。定義より $x \sim a$ かつ $x \sim b$ である。対称性より $a \sim x$ であり、推移性より $a \sim b$ である。

任意の $y \in [a]$ を取ると、 $y \sim a$ である。さらに $a \sim b$ なので、推移性より $y \sim b$ である。したがって $y \in [b]$ であり、 $[a] \subseteq [b]$ である。同様に $[b] \subseteq [a]$ なので $[a] = [b]$ である。

6 逆に、分割から同値関係へ

分割とは、 A の空でない部分集合の集まりで、互いに交わらず、全体を覆うものである。

分割が与えられたら、「 a と b が同じ部品に属する」と定義して $a \sim b$ とする。このとき \sim は同値関係である。反射性は a が必ず何らかの部品に属することから従う。対称性は「同じ部品に属する」が対称な主張であることから従う。推移性は、部品どうしが交わらないことから従う。

分割から同値関係を作るときは、「同じブロックに属する」ことを関係にする。自分は自分と同じブロックに属し、向きを逆にしても変わらず、同じブロックを経由しても同じブロックに留まる。

7 例題：合同による同値関係

れいだい ごうどう どうちかんけい
equivalence relation

7.1 問題

もんだい

整数全体 \mathbb{Z} に対して、 $a \sim b$ を「 $a - b$ が 3 の倍数である」と定義する。これは同値関係であることを確認し、同値類を述べよ。

せいすう ぜんたい たい ばいすう ていぎ どうちかんけい かくにん
equivalence relation
どうちるい の
equivalence class

7.2 解説

かいせつ

反射性について、 $a - a = 0$ は 3 の倍数なので $a \sim a$ である。

はんしゃせい ばいすう
reflexivity

対称性について、 $a \sim b$ とすると $a - b = 3k$ と書ける。すると $b - a = -3k = 3(-k)$ なので $b \sim a$ である。

たいしょうせい か
symmetry

推移性について、 $a \sim b$ かつ $b \sim c$ とする。すると $a - b = 3k$ 、 $b - c = 3l$ と書ける。両式を足すと $a - c = 3(k + l)$ なので $a \sim c$ である。

すいせい か りょうしき た
transitivity

同値類は、3 で割った余りごとに

どうちるい わ あま
equivalence class

$$[0] = \{\dots, -6, -3, 0, 3, 6, \dots\}$$

$$[1] = \{\dots, -5, -2, 1, 4, 7, \dots\}$$

$$[2] = \{\dots, -4, -1, 2, 5, 8, \dots\}$$

である。この例は、同値関係が集合を重ならない分類へ分解することを示している。

れい どうちかんけい しゅうごう かき ぶんるい ぶんかい しめ
equivalence relation set classification

→ 講義 同値関係と剰余類の基本 lecture math abstract-algebra

<https://study.bem130.com/lecture/math/abstract-algebra/同値関係と剰余類の基本-講義/>

8 見分け方

みわ かた

対象を「同じ種類」に分けたいなら、同値関係を考える。

たいしょう おな しゅるい わ どうちかんけい かんが
equivalence relation

同値関係を示すには、反射性、対称性、推移性を別々に確認する。

どうちかんけい しめ はんしゃせい たいしょうせい すいせい べつべつ かくにん
equivalence relation reflexivity symmetry transitivity

• 同値類は、代表元そのものではなく、代表元と同類な元の集合である。

• 分割が表れたら、同じ部品に属するという同値関係を作れる。

見分けるときは、関係の性質と分類の性質を対応させる。同値類が重なるなら同じ同値類であり、代表元を変えても属する同値類は変わらない。

9 証明補足：同値関係と分割は同じ情報である

同値関係からは、同値類の集まり

$$X / \sim = \{[x] \mid x \in X\}$$

ができる。これが X の分割になることを証明する。

まず、反射性より $x \sim x$ なので、 $x \in [x]$ である。したがってどの要素も少なくとも一つの類に入る。

つぎに、二つの同値類 $[x]$ と $[y]$ が交わるとする。 $z \in [x] \cap [y]$ を取る。このとき $z \sim x$ かつ $z \sim y$ である。

対称性より $x \sim z$ 、推移性より $x \sim y$ である。すると $u \in [x]$ なら $u \sim x \sim y$ なので $u \in [y]$ である。同じ議論で $[y] \subseteq [x]$ も従う。よって $[x] = [y]$ である。

逆に、 X の分割 \mathcal{C} が与えられたとする。 $x \sim y$ を「 x と y が同じ部品に属する」と定義する。各要素は一つの部品に属するので反射性が成り立つ。同じ部品に属するという条件は左右を入れ替えても変わらないので対称性が成り立つ。また、 x, y が同じ部品、 y, z が同じ部品なら、分割の部品は重ならないため x, z も同じ部品に属する。よって推移性も成り立つ。

10 演習リンク

→ 基本演習 関係と同値関係 exercise math discrete-math

<https://study.bem130.com/exercise/math/discrete-math/関係と同値関係-基本演習/>

11 かんれん 関連リンク

→ 講義 関係の基本 lecture math discrete-math

<https://study.bem130.com/lecture/math/discrete-math/関係の基本-講義/>

→ 講義 同値関係と剰余類の基本 lecture math abstract-algebra

<https://study.bem130.com/lecture/math/abstract-algebra/同値関係と剰余類の基本-講義/>

商集合 と自然な射影

quotient set canonical projection

1 導入

同値関係で対象を分類したら、次に考えるべき問いは「分類された箱そのものを元として扱えるか」である。この発想が商集合である。

商集合では、個々の元ではなく、同値類を1つの対象として扱う。つまり、細かい違いを忘れ、同値と見なすものを同じ点へ潰す。

商集合では、個々の元をそのまま見るのではなく、同値類を1つの新しい元として扱う。同じ同値類に入る代表元は、商の世界では区別されない。

2 用語と定義

集合 A 上の同値関係 \sim に対して、商集合 A/\sim を

$$A/\sim = \{[a] \mid a \in A\}$$

で定義する。ここで $[a]$ は a の同値類である。

順序上の注意として、写像の正式な講義は後にある。このページでは、 $\pi: A \rightarrow A/\sim$ を「各 $a \in A$ に $[a]$ を割り当てる規則」という最小限の意味で使う。

自然な射影 $\pi: A \rightarrow A/\sim$ を

$$\pi(a) = [a]$$

で定義する。これは各元 a を、その元が属する同値類へ送る写像である。

3 方針

商集合を扱うときは、代表元と同値類を区別する。 a は A の元であり、 $[a]$ は A/\sim の元である。

さらに、商集合上で写像を定義するときは、well-defined 性を確認する。同じ同値類を別の代表元で書いても、定義した値が変わらないことを示す必要がある。

手順として、まず関係が同値関係であることを確認し、次に同値類を作る。自然な射影は、各元をその元が属する同値類へ送る。

→ 講義 同値関係と分割

lecture

math

discrete-math

<https://study.bem130.com/lecture/math/discrete-math/同値関係と分割-講義/>

4 直感的な説明

商集合は、分類された箱の集合である。自然な射影は、各元を「その入っている箱」へ送る。

たとえば整数を3で割った余りで分類すると、商集合は

$$\mathbb{Z}/\sim = \{[0], [1], [2]\}$$

である。ここで $[1] = [4] = [-2]$ である。代表元は違っても、表している同値類は同じである。

同値類は箱として考えるとよい。代表元を選んで計算してもよいが、結果が代表元の選び方に依存しないこと、つまり well-defined 性を確認する必要がある。

5 well-defined 性とは何か

商集合では、1つの元が複数の代表元で書ける。したがって、 $F([a])$ のように定義するとき、 $a \sim b$ なら $F([a]) = F([b])$ であることを確認しなければならない。

この確認を かくにん well-defined 性の確認 かくにん という。well-defined 性が失敗 しっぱい すると、同じ商集合 おな しょうしゅうごう の元 げん に対して、代表元 だいひょうげん の選び方 えら かた によって異なる well-definedness 値 こと が出てしまう あた い で。

well-defined 性を示すには、同値 しめ な 2 つの代表元 どうち を取り、それらから得られる だいひょうげん と 値 え や同値類 あた い どうちるい が同じになることを証明 おな する。代表元 しめ を 1 つだけ計算 だいひょうげん するだけでは不十分 けいさん である ふじゅうぶん。

6 例題：自然な射影 れいだい しぜん しゃえい

canonical projection

6.1 問題 もんだい

\mathbb{Z} 上で $a \sim b$ を「 $a - b$ が 3 の倍数 ばいすう である」と定義 ていぎ する。このとき自然な射影 しぜん しゃえい $\pi : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}/\sim$ の $\pi(5)$ と $\pi(-1)$ canonical projection を求めよ もと。

6.2 解説 かいせつ

自然な射影 しぜん しゃえい は $\pi(a) = [a]$ である。したがって canonical projection

$$\pi(5) = [5]$$

である。5 \sim 2 かつ 5 \sim -1 なので、これは $[2]$ や $[-1]$ と同じ同値類 おな どうちるい である equivalence class。

また

$$\pi(-1) = [-1]$$

であり、 $[-1] = [2] = [5]$ である。したがって $\pi(5) = \pi(-1)$ である。この例は、自然な射影 れい 自然な射影 が同値な元 しぜん しゃえい どうち げん おな を同じ同値類 どうちるい つぶ へ潰 しめ すことを示している equivalence class。

7 見分け方と関連リンク みわ かた かんれん

- 同値関係 どうちかんけい で分類 ぶんるい した箱 はこ を元 げん として扱う あつか なら、商集合 しょうしゅうごう を考える かんが。
- a と $[a]$ を区別 くべつ する。前者 ぜんしゃ は元の集合 もと しゅうごう の元 げん、後者 こうしゃ は商集合 しょうしゅうごう の元 げん である set element quotient set element。

- 商集合 しょうしゅうごう 上で代表元 だいひょうげん を使って写像 つが を定義 しやぞう するなら、well-defined ていぎ 性を確認 かくにん する。
quotient set map well-definedness
- 自然 しぜん な射影 しゃえい は、各 かく 元 げん をその同値類 どうちるい へ送 おく る。
canonical projection element equivalence class

→ **基本演習** **関係と同値関係** **exercise** **math** **discrete-math**

<https://study.bem130.com/exercise/math/discrete-math/関係と同値関係-基本演習/>

→ **講義** **同値関係と分割** **lecture** **math** **discrete-math**

<https://study.bem130.com/lecture/math/discrete-math/同値関係と分割-講義/>

→ **講義** **同値関係と剰余類の基本** **lecture** **math** **abstract-algebra**

<https://study.bem130.com/lecture/math/abstract-algebra/同値関係と剰余類の基本-講義/>

はんじゅんじょかんけい ぜんじゅんじょかんけい

半順序関係と全順序関係

partial order total order

1 導入

順序関係で重要なのは、「比較できる」とは何を意味するかを分解することである。日常の大小では、任意の2つを比べられることが多い。しかし集合の包含や整数の整除では、2つの対象が常に比較できるとは限らない。

この違いを扱うために、半順序関係と全順序関係を分ける。半順序関係は「比較できる組だけを比較する」構造であり、全順序関係は「任意の2つを必ず比較する」構造である。

半順序関係では比較不能な2元が存在してもよい。全順序関係は、これに加えて任意の2元が比較できることを要求する。

2 用語と定義

集合 P 上の二項関係 \leq が半順序関係であるとは、次の3条件を満たすことである。

条件	式	意味
反射性 reflexivity	$a \leq a$	自分は自分以下である
反対称性 antisymmetry	$a \leq b, b \leq a \Rightarrow a = b$	相互に以下なら同一である
推移性 transitivity	$a \leq b, b \leq c \Rightarrow a \leq c$	順序は中継できる

$a \leq b$ または $b \leq a$ が成り立つとき、 a と b は比較可能であるという。半順序集合で任意の2元が比較可能なら、その順序を全順序関係という。

3 方針

順序関係を判定するときは、まず反射性、反対称性、推移性を確認する。ここまでは半順序関係の確認である。

その後、任意の2元が比較可能かを確認する。これが成り立てば全順序関係であり、成り立たなければ半順序関係だが全順序関係ではない。

判定では、反射性・反対称性・推移性を順に確認する。全順序関係を示すには、さらに任意の2元が比較可能であることを加える。

→ 講義 関係の基本 [lecture](#) [math](#) [discrete-math](#)

<https://study.bem130.com/lecture/math/discrete-math/関係の基本-講義/>

4 直感的な説明

全順序関係は、一列に並べられる順序である。通常 \leq による実数の大小は全順序関係である。任意の a, b について、 $a \leq b$ または $b \leq a$ が成り立つからである。

一方、半順序関係は、枝分かれを許す順序である。 $\{1, 2\}$ と $\{1, 3\}$ は、包含では比較できない。どちらも相手を含まないからである。しかし $\{1\} \subseteq \{1, 2\}$ は成り立つ。したがって包含は半順序関係であるが、一般には全順序関係ではない。

5 代表例

5.1 1. べき集合の包含順序

$\mathcal{P}(A)$ 上で $B \leq C$ を $B \subseteq C$ と定義する。これは半順序関係である。反射性は $B \subseteq B$ 、反対称性は $B \subseteq C$ かつ $C \subseteq B$ なら $B = C$ 、推移性は $B \subseteq C$ かつ $C \subseteq D$ なら $B \subseteq D$ であることから従う。

ただし、一般には全順序関係ではない。 $A = \{1, 2, 3\}$ のとき、 $\{1, 2\}$ と $\{1, 3\}$ は比較可能ではない。

→ 講義 べき集合の基本 lecture math discrete-math

<https://study.bem130.com/lecture/math/discrete-math/べき集合の基本-講義/>

5.2 2. 正の整数の整除順序

正の整数の集合で、 $a \leq b$ を「 a が b を割り切る」と定義する。これは半順序関係である。しかし 2 と 3 は互いに割り切らないため、比較可能ではない。したがって全順序関係ではない。

5.3 3. 数の通常的大小

\mathbb{R} 上の通常 \leq は全順序関係である。任意の $a, b \in \mathbb{R}$ について $a \leq b$ または $b \leq a$ が成り立つからである。

6 例題：半順序だが全順序ではないことを示す

6.1 問題

$A = \{1, 2, 3\}$ とし、 $\mathcal{P}(A)$ 上に $B \leq C \iff B \subseteq C$ と定義する。この順序が半順序関係であり、全順序関係ではないことを示せ。

6.2 解説

反射性は、任意の $B \in \mathcal{P}(A)$ について $B \subseteq B$ であることから成り立つ。

反対称性は、 $B \subseteq C$ かつ $C \subseteq B$ なら外延性より $B = C$ であることから成り立つ。

推移性は、 $B \subseteq C$ かつ $C \subseteq D$ なら $B \subseteq D$ であることから成り立つ。よってこれは半順序関係である。

しかし $\{1, 2\}$ と $\{1, 3\}$ は、どちらも相手を含まない。したがって比較可能ではない。任意の 2 元が比較可能ではないので、これは全順序関係ではない。

7 見分け方

- 比較の関係が反射性、反対称性、推移性を満たすなら、半順序関係を疑う。
 - 任意の 2 元が比較できるなら、全順序関係である。
 - 比較できない 2 元が 1 組でも存在すれば、全順序関係ではない。
 - 同値関係は対称性を持つが、順序関係は反対称性を持つ。この違いを混同しない。
- 比較不能な組があることは、全順序関係の失敗を示すが、半順序関係の失敗ではない。反対称性では、両向きに関係する別の 2 元がないかを確認する。

8 証明補足：部分集合への制限で順序が保存される

(X, \leq) を半順序集合とし、 $Y \subseteq X$ とする。 Y 上の関係を

$$y_1 \underset{Y}{\leq} y_2 \iff y_1 \leq y_2$$

で定義する。このとき $(Y, \underset{Y}{\leq})$ も半順序集合である。

反射性は、任意の $y \in Y$ について $y \leq y$ が X で成り立つことから従う。反対称性は、 $y_1 \underset{Y}{\leq} y_2$ かつ $y_2 \underset{Y}{\leq} y_1$ なら、 X で $y_1 \leq y_2$ かつ $y_2 \leq y_1$ なので $y_1 = y_2$ であることから従う。推移性も同じく、 X での推移性をそのまま使う。

さらに (X, \leq) が全順序集合なら、 $(Y, \underset{Y}{\leq})$ も全順序集合である。任意の $y_1, y_2 \in Y$ は X の要素でもあるので、 $y_1 \leq y_2$ または $y_2 \leq y_1$ が成り立つからである。

この証明は、順序を小さな集合へ制限しても、順序の公理が壊れないことを示している。

えんしゅう

9 演習リンク

→ 基本演習 順序関係と束 exercise math discrete-math

<https://study.bem130.com/exercise/math/discrete-math/順序関係と束-基本演習/>

かんれん

10 関連リンク

→ 講義 束の基本 lecture math discrete-math

<https://study.bem130.com/lecture/math/discrete-math/束の基本-講義/>

→ 講義 べき集合の基本 lecture math discrete-math

<https://study.bem130.com/lecture/math/discrete-math/べき集合の基本-講義/>

Hasse 図と 極大元・極小元

Hasse diagram maximal element minimal element

1 導入

半順序集合では、任意の 2 元が比較できるとは限らない。そのため、一列に並べるよりも、上下関係を図として描くほうが構造が見えやすい。この図が Hasse 図である。

極大元と最大元、極小元と最小元は混同しやすい。Hasse 図を使うと、この違いを視覚的に理解できる。

このとき、比較不能な元が残りうることが重要である。Hasse 図は全順序のようにすべてを横一列へ押し込むのではなく、比較できる部分だけを上下に見せる。

2 用語と定義

半順序集合 (P, \leq) に対して、 $a < b$ とは $a \leq b$ かつ $a \neq b$ を意味する。

$a < b$ であり、かつ $a < c < b$ となる $c \in P$ が存在しないとき、 b は a を被覆するという。Hasse 図では、この被覆関係だけを線で結び、小さい元を下、大きい元を上置く。

3 極大・最大・極小・最小

極大元とは、自分より真に大きい元が存在しない元である。最大元とは、すべての $x \in P$ について $x \leq m$ を満たす m である。

極小元とは、自分より真に小さい元が存在しない元である。最小元とは、すべての $x \in P$ について $m \leq x$ を満たす m である。

最大元さいだいげんと最小元さいしょうげんは、候補こうほがすべての元げんと比較ひかくできることまで要求ようきゅうする。これに対して極大元きょくだいげんと極小元きょくしょうげんは、自分じぶんより上うへまたは下したへ進すすめないという局所きょくしょ的な条件じょうけんである。

4 方針

Hasse図ハッセ図を作るときは、すべての比較関係ひかくかんけいを線せんで描かかない。推移性すいせいから分かる線せんを省略しょうりゃくし、被覆関係ひふくかんけいだけを残のこす。

この省略しょうりゃくで見た目の線せんの数は減かるが、半順序関係はんじゅんじょかんけいとしての到達可能とうたつかのうな上下関係じょうげかんけいは保ほ存ぞんされる。

被覆関係ひふくかんけいとは、 $x < y$ で、 $x < z < y$ となる中間ちゅうかんの元げんがない関係かんけいである。図ずではこの線せんだけを描えがき、上向うむむきの道みちをたどることで省略しょうりゃくした比較ひかくを復元ふくげんする。

→ 講義 半順序関係と全順序関係 [lecture](#) [math](#) [discrete-math](#)

<https://study.bem130.com/lecture/math/discrete-math/半順序関係と全順序関係-講義/>

5 直感的な説明

最大元さいだいげんは全員ぜんいんの上うへにいる1つの元げんである。一方、極大元きょくだいげんは、自分じぶんより上うへに行けいない元げんである。したがって、極大元きょくだいげんは複数ふくすう存在そんざいしうるが、最大元さいだいげんが存在そんざいするなら一意いちいである。

下側したがわも同様どうようである。最小元さいしょうげんは全員ぜんいんの下したにいる1つの元げんであり、極小元きょくしょうげんは自分じぶんより下したに行けいない元げんである。

最大元さいだいげんが存在そんざいすれば一意いちいだが、極大元きょくだいげんは複数ふくすうあってよい。さらに、上うへへ行けいない元げんがあっても、比較不能ひかくふのうな別の元べつげんがあるなら、それは全員ぜんいんの上うへにいるとは言いえない。

6 例題：極大元と最大元

れいだい きょくだいげん さいだいげん
maximal element greatest element

6.1 問題

もんだい

$P = \{\{1\}, \{2\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}\}$ を包含 \subseteq で順序づける。極大元と最大元を求めよ。

ほうがん じゅんじょ きょくだいげん さいだいげん もと
inclusion maximal element greatest element

6.2 解説

かいせつ

$\{1, 2\}$ は $\{1\}$ を含み、 $\{1, 3\}$ も $\{1\}$ を含む。しかし $\{1, 2\}$ と $\{1, 3\}$ は互いに相手を含まないため、比較できない。

ふく ふく たが あいて ふく ひかく

$\{1, 2\}$ より真に大きい元は P の中に存在しない。同様に $\{1, 3\}$ より真に大きい元も存在しない。したがって極大元は $\{1, 2\}$ と $\{1, 3\}$ である。

しん おお げん なか そんざい どうよう しん おお げん そんざい
element element

きょくだいげん
maximal element

最大元は全ての元を含む元でなければならない。 $\{1, 2\}$ は $\{1, 3\}$ を含まず、 $\{1, 3\}$ は $\{1, 2\}$ を含まない。したがって最大元は存在しない。

さいだいげん すべ げん ふく げん ふく
greatest element element element

さいだいげん そんざい
greatest element

7 見分け方

みわ かた

- 最大元は、すべての元と比較して上にある必要がある。

さいだいげん げん ひかく うえ ひつよう
greatest element element

- 極大元は、自分より上が存在しないだけでよい。

きょくだいげん じぶん うえ そんざい
maximal element

- 最小元は、すべての元と比較して下にある必要がある。

さいしょうげん げん ひかく した ひつよう
least element element

- 極小元は、自分より下が存在しないだけでよい。

きょくしょうげん じぶん した そんざい
minimal element

- Hasse図では、推移性で分かる線は省略する。

ず すいせい わ せん しょうりやく
Hasse diagram transitivity

判定では、まず候補を1つ選び、その候補がすべての元と必要な向きで比較できるかを調べる。比較不能な元が1つでもあれば、最大元や最小元ではない。

ほんてい こうほ えら こうほ げん ひつよう む ひかく しら ひかくふのう
element

げん さいだいげん さいしょうげん
element greatest element least element

8 演習・関連リンク

えんしゅう かんれん

→ **基本演習** 順序関係と束 **exercise** **math** **discrete-math**

<https://study.bem130.com/exercise/math/discrete-math/順序関係と束-基本演習/>

→ **講義** 半順序関係と全順序関係 **lecture** **math** **discrete-math**

<https://study.bem130.com/lecture/math/discrete-math/半順序関係と全順序関係-講義/>

→ **講義** 束の基本 **lecture** **math** **discrete-math**

<https://study.bem130.com/lecture/math/discrete-math/束の基本-講義/>

順序同型と整列順序

半順序関係を学ぶ目的は、大小を数値だけでなく構造として扱うことである。そこで重要になるのが、順序を保つ写像と、順序構造が本質的に同じであることを表す順序同型である。

順序同型では、元の名前や表示ではなく、比較関係そのものが見える。整列順序では、全体だけでなく任意の空でない部分集合に最小元があることまで要求する。

→ [講義](#) [半順序関係と全順序関係](#) [lecture](#) [math](#) [discrete-math](#)

<https://study.bem130.com/lecture/math/discrete-math/半順序関係と全順序関係-講義/>

1 順序を保つ写像

順序上の注意として、写像と全単射の正式な講義は後にある。このページでは、写像を「各元に行き先を1つ割り当てる規則」、全単射を「重なりも余りもない対応」として使う。

半順序集合 P, Q に対して、写像 $f: P \rightarrow Q$ が順序保存写像であるとは、

$$x \leq_P y \Rightarrow f(x) \leq_Q f(y)$$

が成り立つことである。

これは「比較できる関係を壊さない」ことを意味する。等号や距離を保存する必要はない。保存するのは順序である。

2 順序同型

写像 $f: P \rightarrow Q$ が全単射であり、さらに

$$x \leq_P y \Leftrightarrow f(x) \leq_Q f(y)$$

を満たすとき、 f を順序同型という。
order isomorphism

順序同型があるとき、 P と Q は順序構造として同じである。元の名前は違っても、どれがどれ以下かという情報は完全に対応する。

→ 講義

単射・全射・全単射

lecture

math

discrete-math

<https://study.bem130.com/lecture/math/discrete-math/単射・全射・全単射-講義/>

3 鎖と反鎖

鎖とは、任意の 2 元が比較可能な部分集合である。反鎖とは、異なる 2 元が比較不能な部分集合である。
chain subset antichain subset

冪集合 $\mathcal{P}(\{1, 2\})$ を包含で順序づけると、
power set

$$\emptyset \subseteq \{1\} \subseteq \{1, 2\}$$

は鎖である。一方、
chain

$$\{1\}, \{2\}$$

は互いに包含しないので反鎖である。
antichain

鎖では任意の 2 元が比較可能であり、反鎖では異なる 2 元が比較不能である。部分集合として取り出したときの内部の比較だけを見る。
chain antichain

4 整列順序

全順序集合 P が整列順序であるとは、空でない任意の部分集合が最小元を持つことである。
totally ordered set well-order subset least element

自然数全体 \mathbb{N} は通常的大小で整列順序である。一方、整数全体 \mathbb{Z} は通常的大小で全順序集合だが、
well-order totally ordered set

整列順序ではない。なぜなら \mathbb{Z} 自身が最小元を持たないからである。
well-order

整列順序は全順序より強い条件である。全体集合に最小元があるだけでは足りず、どの空でない部分集合を見ても最小元が必要である。
well-order total order subset

5 何を変えずに見ているか

順序保存写像は、順序の向きを保つ。順序同型は、比較可能性、最大元、最小元、上界、下界、結び、交わりなどの順序的性質を保つ。

ここで挙げた結びと交わりは、次の束の講義で正式に定義する。この段階では、順序だけから決まる性質の例として名前だけを先に挙げている。

逆に、元の名前、具体的な表示、数値としての距離は保存対象ではない。

とくに $f: P \rightarrow Q$ が順序同型なら、最大元、最小元、極大元、極小元、上界、下界、鎖、反鎖、結び、交わりは保存される。たとえば g が P の最大元なら、任意の $q \in Q$ に対して $f(p) = q$ となる $p \in P$ が存在し、 $p \leq_P g$ だから $q = f(p) \leq_Q f(g)$ である。したがって $f(g)$ は Q の最大元である。

順序同型で保存されるのは、比較、極大元、最大元、上界、下界などの順序的な性質である。数値の差や元の名前は保存の対象ではない。

6 演習リンク

→ 基本演習 順序同型とブール代数 [exercise](#) [math](#) [discrete-math](#)

<https://study.bem130.com/exercise/math/discrete-math/順序同型とブール代数-基本演習/>

7 まとめ

順序同型は、順序構造が本質的に同じであることを表す。整列順序は、帰納法や最小反例法を支える順序構造である。

順序同型は、名前を変えても順序構造が同じであることを表す。整列順序は、任意の空でない部分集合に最小元があるという強い順序条件である。

8 かんれん 関連リンク

→ 講義 半順序関係と全順序関係 lecture math discrete-math

<https://study.bem130.com/lecture/math/discrete-math/半順序関係と全順序関係-講義/>

→ 講義 単射・全射・全単射 lecture math discrete-math

<https://study.bem130.com/lecture/math/discrete-math/単射・全射・全単射-講義/>

→ 基本演習 順序同型とブール代数 exercise math discrete-math

<https://study.bem130.com/exercise/math/discrete-math/順序同型とブール代数-基本演習/>

束の基本

lattice

1 導入

束で理解すべき中心の問いは、「2つの対象を比べたとき、両方を上から押さえる最小の対象と、両方の下にある最大の対象が存在するか」である。

全順序関係では、2つの対象の大きい方と小さい方がすぐに決まる。しかし半順序関係では、2つが比較できないことがある。それでも、両方の上にある最良の候補と、両方の下にある最良の候補が存在するならば、そこに束の構造がある。

束では、任意の2元について結びと交わりが存在することが必要である。半順序集合なら必ず束になるわけではなく、最良の上界と下界が見つかるかを調べる。

2 用語と定義

半順序集合 (P, \leq) に対して、 $a, b \in P$ の上界とは、 $a \leq u$ かつ $b \leq u$ を満たす $u \in P$ である。下界とは、 $l \leq a$ かつ $l \leq b$ を満たす $l \in P$ である。

上限、または結びとは、上界の内最小のものであり、 $a \vee b$ と書く。下限、または交わりとは、下界の内最大のものであり、 $a \wedge b$ と書く。

任意の $a, b \in P$ について $a \vee b$ と $a \wedge b$ が存在するとき、 (P, \leq) を束という。

上界と最小上界、下界と最大下界を区別する。候補が複数あるとき、その中で順序に関して最良のものが結びや交わりである。

3 方針

束を判定するときは、単に上界や下界が存在するのだけを見ない。必要なのは、上界の中の最小元と、下界の中の最大元である。

この違いは重要である。上界が複数存在しても、その中で最小のものが存在しない場合がある。その場合、結びは存在しない。

計算では、まず共通の上にある元、または共通の下にある元を集める。次に、その集合の中で順序に関して最小または最大のものを選ぶ。

→ 講義 半順序関係と全順序関係

lecture

math

discrete-math

<https://study.bem130.com/lecture/math/discrete-math/半順序関係と全順序関係-講義/>

4 直感的な説明

束は、「合流」と「共通部分」が常に取りれる半順序集合である。包含順序で考えると、2つの集合 B, C の結びは $B \cup C$ であり、交わりは $B \cap C$ である。

なぜなら、 $B \cup C$ は B と C の両方を含む集合の内最小であり、 $B \cap C$ は B と C の両方に含まれる集合の内最大だからである。

Hasse図では、結びは2元の共通の上側にあるもののうち最も低い元であり、交わりは共通の下側にあるもののうち最も高い元である。最良の候補が一意に決まらなければ、束の条件は失敗する。

5 代表例

5.1 1. べき集合は束である

$\mathcal{P}(A)$ を包含 \subseteq で順序づける。このとき、任意の $B, C \subseteq A$ について

$$B \vee C = B \cup C, \quad B \wedge C = B \cap C$$

である。したがって $(\mathcal{P}(A), \subseteq)$ は束である。

さらに \emptyset は最小元、 A は最大元である。この束はブール束の基本例である。

→ 講義 べき集合の基本

lecture

math

discrete-math

<https://study.bem130.com/lecture/math/discrete-math/べき集合の基本-講義/>

5.2 2. 正の整数の整除順序

正の整数で $a \leq b$ を「 a が b を割り切る」と定義する。この順序では、 $a \vee b$ は最小公倍数、 $a \wedge b$ は最大公約数である。

たとえば 6 と 10 について、上界は 6 と 10 の公倍数であり、その最小は 30 である。したがって $6 \vee 10 = 30$ である。下界は 6 と 10 の公約数であり、その最大は 2 である。したがって $6 \wedge 10 = 2$ である。

整除順序では、上にあるとは「倍数である」ことを意味する。したがって結びは最小公倍数、交わりは最大公約数になり、通常的大小とは別の判断になる。

6 例題：包含順序で結びと交わりを求める

6.1 問題

$A = \{1, 2, 3\}$ 、 $B = \{1, 2\}$ 、 $C = \{2, 3\}$ とする。 $(\mathcal{P}(A), \subseteq)$ における $B \vee C$ と $B \wedge C$ を求めよ。

6.2 解説

包含順序では、結びは和集合である。したがって

$$B \vee C = B \cup C = \{1, 2, 3\}$$

である。これは B と C の両方を含む集合の内最小である。

また、交わりは共通部分である。したがって

$$B \wedge C = B \cap C = \{2\}$$

である。これは B と C の両方に含まれる集合の内最大である。

この例は、束の抽象的な定義が、集合演算の \cup と \cap に対応することを確認している。

7 変わるものと保存されるもの

視点	か 変わるもの	ほぞん 保存されるもの
半順序集合を見る partially ordered set	比較できない組を許す	反射性、反対称性、推移性 reflexivity antisymmetry transitivity
束を見る lattice	任意の2元に結びと交わりを要求する join meet	半順序関係 partial order
ブール束を見る Boolean lattice	補集合まで扱う complement	和集合と共通部分による束 union intersection lattice

順序同型は比較を保つため、結びや交わりが存在するなら、その対応先も同じ役割を持つ。保存されるのは数値ではなく、順序で定まる最良性である。

8 見分け方

任意の2元に上限と下限があるなら、束である。

包含順序では、結びは \cup 、交わりは \cap である。

• 整除順序では、結びは最小公倍数、交わりは最大公約数である。

せいじょじゅんじょ ぐんじょ さいしやうこうばいすう まじ さいだいこうやくすう
divisibility order join least common multiple meet greatest common divisor

• 全順序関係では、2元の大きい方が結び、小さい方が交わりになる。

ぜんじゅんじょかんけい げん おお ほう むす ちい ほう まじ
total order join meet

束かどうかは、代表例だけでなく任意の2元について確認する。一組でも結びまたは交わりが存在しなければ、その半順序集合は束ではない。

9 証明補足：meet と join の単調性

しょうめい ほそく たんちやうせい

束では、 $a \leq b$ なら

lattice

$$a \wedge c \leq b \wedge c, \quad a \vee c \leq b \vee c$$

が成り立つ。これは meet と join が順序を保存するという意味である。

まず meet を証明する。 $a \wedge c$ は a と c の下界である。したがって $a \wedge c \leq a$ かつ $a \wedge c \leq c$ である。 $a \leq b$ なので $a \wedge c \leq b$ も従う。よって $a \wedge c$ は b と c の下界である。 $b \wedge c$ は b と c の最大下界なので、 $a \wedge c \leq b \wedge c$ である。

join も双対に証明できる。 $b \vee c$ は b と c の上界であり、 $a \leq b \leq b \vee c$ 、 $c \leq b \vee c$ だから、 $b \vee c$ は a と c の上界である。 $a \vee c$ は a と c の最小上界なので、 $a \vee c \leq b \vee c$ である。

10 演習リンク

えんしゅう

→ 基本演習 順序関係と束 exercise math discrete-math

<https://study.bem130.com/exercise/math/discrete-math/順序関係と束-基本演習/>

11 関連リンク

かんれん

→ 講義 半順序関係と全順序関係 lecture math discrete-math

<https://study.bem130.com/lecture/math/discrete-math/半順序関係と全順序関係-講義/>

→ 講義

べき集合の基本

lecture

math

discrete-math

<https://study.bem130.com/lecture/math/discrete-math/べき集合の基本-講義/>

ブール代数の基本

Boolean algebra

ブール代数は、論理と集合演算を同じ形で扱うための構造である。命題の「かつ」「または」「でない」と、集合の共通部分、和集合、補集合は対応している。

→ 講義 命題・述語と量化 [lecture](#) [math](#) [discrete-math](#)

<https://study.bem130.com/lecture/math/discrete-math/命題・述語と量化-講義/>

→ 講義 束の基本 [lecture](#) [math](#) [discrete-math](#)

<https://study.bem130.com/lecture/math/discrete-math/束の基本-講義/>

1 命題と集合の対応

全体集合 U を固定し、述語 $P(x)$ の真理集合を

$$S_P = \{x \in U \mid P(x)\}$$

とする。このとき、論理演算と集合演算は次のように対応する。

論理	集合
$P \wedge Q$	$S_P \cap S_Q$
$P \vee Q$	$S_P \cup S_Q$
$\neg P$	$U \setminus S_P$
$P \Rightarrow Q$	$S_P \subseteq S_Q$
$P \Leftrightarrow Q$	$S_P = S_Q$

この対応により、論理式の変形を集合演算として読むことができる。

2 冪集合はブール代数になる

power set

Boolean algebra

任意の集合 U に対して、冪集合 $\mathcal{P}(U)$ は、包含順序、和集合、共通部分、補集合によってブール代数になる。

$$X \vee Y = X \cup Y$$

$$X \wedge Y = X \cap Y$$

$$\neg X = U \setminus X$$

ここで \vee は結び、 \wedge は交わりに対応する。

join

meet

→ 講義 べき集合の基本 lecture math discrete-math

<https://study.bem130.com/lecture/math/discrete-math/べき集合の基本-講義/>

3 ド・モルガンの法則

De Morgan's laws

ド・モルガンの法則は、否定が「かつ」と「または」を入れ替えることを表す。

De Morgan's laws

ろんり
論理では

$$\neg(P \wedge Q) \Leftrightarrow (\neg P) \vee (\neg Q)$$

$$\neg(P \vee Q) \Leftrightarrow (\neg P) \wedge (\neg Q)$$

である。集合では

$$U \setminus (A \cap B) = (U \setminus A) \cup (U \setminus B)$$

$$U \setminus (A \cup B) = (U \setminus A) \cap (U \setminus B)$$

である。

4 何を抽象化しているか

なに ちゅうしょうか

ブール代数は、対象が命題なのか集合なのかをいったん忘れて、演算の満たす法則だけを見る。保存されるのは、結び、交わり、補元、最大元、最小元に関する構造である。

Boolean algebra

むす

まし

ほげん

さいだいげん

さいしょうげん

かん

こうぞう

この抽象化により、論理回路、集合族、条件分岐、検索条件の組み合わせを同じ形式で扱える。

具体的な命題や集合を置き換えても、同じ結び・交わり・補元の法則で計算できることが要点である。

対象そのものではなく、演算が保存する構造を見ている。

5 証明補足：補元の一意性

complement

ブール代数で x の補元が一意であることを示す。 y と z がどちらも x の補元だとする。つまり

$$x \wedge y = 0, \quad x \vee y = 1, \quad x \wedge z = 0, \quad x \vee z = 1$$

である。このとき

$$y = y \wedge 1 = y \wedge (x \vee z) = (y \wedge x) \vee (y \wedge z) = 0 \vee (y \wedge z) = y \wedge z \leq z.$$

同じ議論で $z \leq y$ も従うので、反対称性より $y = z$ である。

6 証明補足：ド・モルガンの法則

De Morgan's laws

補元の一意性を使うと、ド・モルガンの法則も見通しよく証明できる。たとえば $x \wedge y$ の補元が $x' \vee y'$ であることを示せばよい。

$$(x \wedge y) \wedge (x' \vee y') = ((x \wedge y) \wedge x') \vee ((x \wedge y) \wedge y') = 0,$$

$$(x \wedge y) \vee (x' \vee y') = (x \vee x' \vee y') \wedge (y \vee x' \vee y') = 1.$$

よって補元の一意性から

$$(x \wedge y)' = x' \vee y'$$

である。同じ方法で $(x \vee y)' = x' \wedge y'$ も得られる。

7 演習リンクとまとめ

→ 基本演習 順序同型とブール代数 [exercise](#) [math](#) [discrete-math](#)

<https://study.bem130.com/exercise/math/discrete-math/順序同型とブール代数-基本演習/>

ブール代数は、ろんり論理としゅうごうえんざん集合演算をつなぐこうぞう構造である。べきしゅうごう冪集合は最ももと基本的なきほんブール代数であり、
Boolean algebra
ド・モルガンのちゅうしんてき法則はそのけいさん中心ほうそく的なBoolean algebra計算法則である。
De Morgan's laws

写像の基本

map

1 導入

写像で最初に固定すべき問いは、「各入力に対して、出力を一意に決めているか」である。写像は、関係の一種であるが、任意の関係よりも条件が強い。

この条件があるから、 $f(a)$ という記号が意味を持つ。1つの a に複数の出力が対応すれば、 $f(a)$ は1つの値として定まらない。対応する出力が存在しなければ、 $f(a)$ は未定義になる。

写像で必須なのは、各入力に出力がちょうど1つ決まることである。異なる入力と同じ出力へ行くことは、単射を要求しない限り許される。

2 用語と定義

集合 A, B に対して、写像 $f: A \rightarrow B$ とは、各 $a \in A$ に対して、一意の $b \in B$ を対応させる規則である。

A を定義域、 B を終域という。 a に対応する値を $f(a)$ と書く。値域または像は、実際に現れる出力の集合であり、

$$f(A) = \{f(a) \mid a \in A\}$$

である。常に $f(A) \subseteq B$ である。

3 像と逆像

部分集合 $S \subseteq A$ の像は

$$f(S) = \{f(a) \mid a \in S\}$$

である。部分集合 $T \subseteq B$ の逆像は

$$f^{-1}(T) = \{a \in A \mid f(a) \in T\}$$

である。ここで $f^{-1}(T)$ は逆写像を仮定している記号ではない。逆像は、任意の写像で定義できる。

4 方針

写像を確認するときは、次の2点を分ける。

1. 各 $a \in A$ に対して、少なくとも1つの出力が存在するか。

2. 各 $a \in A$ に対して、出力が高々1つか。

両方が成り立つとき、出力は[ちょうど1つ]であり、写像である。関係として見るなら、 f は $A \times B$ の部分集合であり、各 $a \in A$ に対して $(a, b) \in f$ となる b が[ちょうど1つ]である。

→ 講義 関係の基本 [lecture](#) [math](#) [discrete-math](#)

<https://study.bem130.com/lecture/math/discrete-math/関係の基本-講義/>

5 直感的な説明

写像は、入力側の各元から出力側へ1本ずつ矢印を引く図として考えられる。各入力から矢印が必ず1本だけ出ることが写像の条件である。

出力側の元には、矢印が0本しか入らないことも、複数本入ることもある。これは写像であること自体には問題ない。これらをさらに制限すると、単射や全射になる。

機械として見ると、変えているのは入力から出力への対応である。一方、定義域の各元を必ず処理することと、終域の中へ出力することは保存される。

→ 講義 単射・全射・全単射 [lecture](#) [math](#) [discrete-math](#)

<https://study.bem130.com/lecture/math/discrete-math/単射・全射・全単射-講義/>

6 厳密な説明

写像 $f: A \rightarrow B$ の像と逆像は、向きが違う。像は A 側の部分集合を B 側へ送る。

$$S \subseteq A \implies f(S) \subseteq B$$

逆像は B 側の部分集合を A 側へ戻す。

$$T \subseteq B \implies f^{-1}(T) \subseteq A$$

逆像は、写像が単射でも全射でもない場合にも定義できる。

7 例題：終域と値域を区別する

7.1 問題

$f: \{1, 2, 3\} \rightarrow \{a, b, c, d\}$ を $f(1) = a$ 、 $f(2) = b$ 、 $f(3) = b$ で定義する。終域と値域を求めよ。

7.2 解説

終域は、写像の型として先に指定された集合である。したがって終域は $\{a, b, c, d\}$ である。

値域は、実際に値として現れる出力の集合である。この例では a と b だけが現れるので、

$$f(A) = \{a, b\}$$

である。 c, d は終域には含まれるが、値域には含まれない。

解答では、表や矢印図だけでなく、定義域・終域・対応規則を言葉でも確認する。未定義の入力や2つの出力を持つ入力があれば、写像ではない。

8 変わるものと保存されるもの

変更	変わるもの	保存されるもの
終域を広げる codomain	全射性の判定 surjectivity	各入力の値 input value
定義域を制限する domain	値域、単射性の判定 range injectivity	残った入力の値 input value
関係から写像を切り出す relation map	採用できる順序対 ordered pair	母体が $A \times B$ であること

終域を広げたり狭めたりすると、同じ対応規則でも全射性が変わることがある。一方、像は定義域と対応規則から決まる。

9 見分け方と関連リンク

- 各入力が出力が[ちょうど1つ]なら、写像である。
input output map
- 1つの入力が複数の出力に対応するなら、写像ではない。
input output map
- 終域は先に指定された出力の候補全体である。
codomain output
- 値域は実際に到達する出力の集合である。
range output
- 逆像は逆写像が存在しなくても定義できる。
preimage inverse map

→ 基本演習 写像と単射全射 exercise math discrete-math

<https://study.bem130.com/exercise/math/discrete-math/写像と単射全射-基本演習/>

→ 講義 単射・全射・全単射 lecture math discrete-math

<https://study.bem130.com/lecture/math/discrete-math/単射・全射・全単射-講義/>

→ 講義

合成写像と逆写像

lecture

math

discrete-math

<https://study.bem130.com/lecture/math/discrete-math/合成写像と逆写像-講義/>

しゃぞう ぞう ぎやくぞう
写像の像と逆像
map image preimage

写像は元を送る規則である。しかし集合論では、1個の元だけでなく、部分集合全体がどう移るかを見ることが多い。そのために使うのが像と逆像である。

→ 講義

写像の基本

lecture

math

discrete-math

<https://study.bem130.com/lecture/math/discrete-math/写像の基本-講義/>

1 像

ぞう
image

$f: A \rightarrow B$ とし、 $S \subseteq A$ とする。 S の像を

$$f(S) = \{f(x) \in B \mid x \in S\}$$

で定義する。これは S の元を f で送って得られる集合である。

特に、 $f(A)$ は値域である。終域 B と値域 $f(A)$ は区別する。

2 逆像

ぎやくぞう
preimage

$T \subseteq B$ とする。 T の逆像を

$$f^{-1}(T) = \{x \in A \mid f(x) \in T\}$$

で定義する。

ここで $f^{-1}(T)$ という記号を使うが、逆写像が存在する必要はない。逆像は「 T に入る出力を持つ入力全体」であり、逆写像とは別の概念である。

→ 講義

合成写像と逆写像

lecture

math

discrete-math

<https://study.bem130.com/lecture/math/discrete-math/合成写像と逆写像-講義/>

3 逆像は集合演算と相性がよい

ぎやくぞう しゅうごうえんざん あいしょう
preimage set operations

ぎやくぞう わしゅうごう きょうつうぶぶん ほしゅうごう たも
逆像は、和集合、共通部分、補集合を保つ。
preimage union intersection complement

$$f^{-1}(T_1 \cup T_2) = f^{-1}(T_1) \cup f^{-1}(T_2)$$

$$f^{-1}(T_1 \cap T_2) = f^{-1}(T_1) \cap f^{-1}(T_2)$$

$$f^{-1}(B \setminus T) = A \setminus f^{-1}(T)$$

りゆう みぎがわ しゅうごう ぞく はんてい
理由は、どれも $f(x)$ が右側の集合に属するかただけで判定できるからである。

4 像では共通部分に注意する

ぞう きょうつうぶぶん ちゅうい
image intersection

ぞう わしゅうごう ふ ま
像は和集合についてはよく振る舞う。
image union

$$f(S_1 \cup S_2) = f(S_1) \cup f(S_2)$$

いっぼう きょうつうぶぶん いっばん
一方、共通部分については一般に
intersection

$$f(S_1 \cap S_2) \subseteq f(S_1) \cap f(S_2)$$

い とうごう な た
までしか言えない。等号がいつも成り立つわけではない。

5 反例：像は共通部分を保存しない

はんれい ぞう きょうつうぶぶん ほぞん
image intersection

ぐたいれい
具体例として、 $A = \{1, 2\}$ 、 $B = \{0\}$ 、 $f(1) = 0$ 、 $f(2) = 0$ とする。 $S_1 = \{1\}$ 、 $S_2 = \{2\}$ とすると、

$$S_1 \cap S_2 = \emptyset$$

なので $f(S_1 \cap S_2) = \emptyset$ である。しかし

$$f(S_1) \cap f(S_2) = \{0\} \cap \{0\} = \{0\}$$

である。これは f が単射でなく、異なる 入力 が同じ 出力 へ潰れているためである。
たんしゃ こと にゅうりよく おな しゅつりよく つぶ
injection

6 何が変わり、何が保存されるか

写像は、入力側の部分集合を出力側へ運ぶ。写像が単射でない場合、異なる元が同じ元へ潰れるため、集合の大きさや共通部分の構造が変わりうる。

逆像は、出力側の条件を入力側の条件へ引き戻す。論理式の真偽をそのまま入力側で判定するため、集合演算との相性がよい。

写像は和集合とは相性がよいが、共通部分を常に保存するとは限らない。これに対して逆像は和集合・共通部分・補集合を論理条件として引き戻すため、保存性が強い。

7 証明補足：逆像が集合演算を保つ理由

$f: X \rightarrow Y$ と $B_1, B_2 \subseteq Y$ に対して、

$$f^{-1}(B_1 \cup B_2) = f^{-1}(B_1) \cup f^{-1}(B_2)$$

を示すには、所属条件を言い換える。

$$x \in f^{-1}(B_1 \cup B_2) \iff f(x) \in B_1 \cup B_2 \iff f(x) \in B_1 \text{ or } f(x) \in B_2 \iff x \in f^{-1}(B_1) \cup f^{-1}(B_2).$$

交わりと補集合も同じ形で証明できる。

8 演習リンクとまとめ

→ 基本演習 像と逆像 [exercise](#) [math](#) [discrete-math](#)

<https://study.bem130.com/exercise/math/discrete-math/像と逆像-基本演習/>

写像は集合を前へ送る操作であり、逆像は条件を後ろへ引き戻す操作である。逆像は逆写像がなくても定義できる点を必ず区別する。

たんしゃ ぜんしゃ ぜんたんしゃ
単射・全射・全単射
 injection surjection bijection

1 導入

写像 $f: A \rightarrow B$ を理解するとき、次に問うべきことは「この写像は情報を潰しているか」「終域の全体に届いているか」である。

単射は異なる入力を異なる出力へ送る性質である。全射は終域の全ての元へ到達する性質である。全単射はその両方であり、一対一対応として逆写像を持つ。

単射は情報を潰さないこと、全射は終域を余らせないことを表す。全単射はその両方を満たすため、矢印を逆向きに読める。

2 用語と定義

写像 $f: A \rightarrow B$ が単射であるとは、任意の $a_1, a_2 \in A$ について

$$f(a_1) = f(a_2) \implies a_1 = a_2$$

が成り立つことである。同値に、 $a_1 \neq a_2$ なら $f(a_1) \neq f(a_2)$ である。

写像 $f: A \rightarrow B$ が全射であるとは、任意の $b \in B$ に対して、ある $a \in A$ が存在し $f(a) = b$ を満たすことである。これは $f(A) = B$ と同値である。

写像 $f: A \rightarrow B$ が全単射であるとは、 f が単射かつ全射であることである。

3 方針

単射を示すときは、 $f(a_1) = f(a_2)$ と仮定して $a_1 = a_2$ を導く。これは「出力が同じなら、入力も同じ」という方向の証明である。

全射を示すときは、任意の $b \in B$ を取り、 $f(a) = b$ を満たす $a \in A$ を構成する。ここでは終域 B の任意の元から始めることが重要である。

全単射を示すには、単射と全射を別々に確認するか、明示的な逆写像を構成する。

→ 講義 写像の基本 lecture math discrete-math

<https://study.bem130.com/lecture/math/discrete-math/写像の基本-講義/>

4 直感的な説明

単射は、入力側の区別を保存する。異なる入力と同じ出力へ潰れないため、出力を見れば入力を区別できる。

全射は、終域を覆う。終域に指定した元が、実際に何かの入力から到達されることを要求する。

全単射は、潰れも余りもない対応である。有限集合では、全単射が存在することは両集合の元の個数が等しいことと対応する。

矢印図では、単射は2つの入力と同じ出力へ合流しないこと、全射は終域の点に矢印が少なくとも1本は入ることとして見える。

5 有限集合での個数の見方

A, B が有限集合の場合、単射 $A \rightarrow B$ が存在するなら $|A| \leq |B|$ である。異なる入力異なる出力を必要とするからである。

全射 $A \rightarrow B$ が存在するならば $|A| \geq |B|$ である。終域の全てを覆うには、少なくとも B の元の数だけ到達先が必要だからである。

$|A| = |B|$ の有限集合では、単射なら全射であり、全射なら単射である。ただし、この結論は有限性を使う。

有限集合で定義域と終域の個数が同じとき、単射と全射は同値になる。ただし、この個数の議論は有限かつ同じ大きさの場合に限って使う。

6 無限集合での注意

無限集合では、有限集合の個数の直感がそのまま使えない。たとえば $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$ とすると、 $n \mapsto n + 1$ は $\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ の単射だが、 0 に到達しないため全射ではない。

7 例題：単射と全射を判定する

7.1 問題

$f: \{1, 2, 3\} \rightarrow \{a, b, c\}$ を $f(1) = a$ 、 $f(2) = b$ 、 $f(3) = b$ で定義する。 f は単射か、全射か、全単射かを判定せよ。

7.2 解説

$f(2) = b$ かつ $f(3) = b$ であり、 $2 \neq 3$ である。異なる入力 2 と 3 が同じ出力 b へ送られているので、 f は単射ではない。

また、終域の元 c に対して、 $f(x) = c$ を満たす $x \in \{1, 2, 3\}$ は存在しない。したがって f は全射でもない。

全単射は単射かつ全射でなければならないので、 f は全単射でもない。

8 見分け方と関連リンク

- 単射は「出力の衝突がないか」を確認する。
たんしゃ しゅつりょく しょうとつ かくにん
injection
- 全射は「終域に届かない元がないか」を確認する。
ぜんしゃ しゅういき とど げん かくにん
surjection codomain element
- 全単射は「衝突も未到達もないか」を確認する。
ぜんたんしゃ しょうとつ みとうたつ かくにん
bijection
- 終域を変えると、全射性の判定は変わりうる。
しゅういき か ぜんしゃせい はんてい か
codomain surjectivity

→ **基本演習** 写像と単射全射 **exercise** **math** **discrete-math**

<https://study.bem130.com/exercise/math/discrete-math/写像と単射全射-基本演習/>

→ **講義** 写像の基本 **lecture** **math** **discrete-math**

<https://study.bem130.com/lecture/math/discrete-math/写像の基本-講義/>

→ **講義** 合成写像と逆写像 **lecture** **math** **discrete-math**

<https://study.bem130.com/lecture/math/discrete-math/合成写像と逆写像-講義/>

合成写像と逆写像

composite map inverse map

1 導入

合成写像で重要なのは、写像を操作として読むことである。 $f: A \rightarrow B$ は A の元を B の元へ送る操作であり、 $g: B \rightarrow C$ はその結果をさらに C へ送る操作である。この2つを続けて行うのが合成写像である。

逆写像は、操作を元に戻す操作である。ただし、戻すためには、入力 が潰れておらず、出力側に余りもないことが必要である。この条件が全単射である。

合成では順序が重要で、先に適用した写像の終域が、次の写像の定義域に合う必要がある。逆写像は、この移動をすべての入力と出力で戻せるときにだけ存在する。

2 用語と定義

写像 $f: A \rightarrow B$ と $g: B \rightarrow C$ が与えられたとき、合成写像 $g \circ f: A \rightarrow C$ を

$$(g \circ f)(a) = g(f(a))$$

で定義する。記号 $g \circ f$ は、先に f を適用し、次に g を適用することを表す。

集合 A 上の恒等写像 $\text{id}_A: A \rightarrow A$ は、

$$\text{id}_A(a) = a$$

で定義される写像である。

写像 $f: A \rightarrow B$ に対して、写像 $h: B \rightarrow A$ が

$$h \circ f = \text{id}_A, \quad f \circ h = \text{id}_B$$

を満たすとき、 h を f の逆写像といい、 f^{-1} と書く。

3 方針

合成写像では、型を先に確認する。 $g \circ f$ を作るには、 f の終域と g の定義域が合っていないなければならない。
composite map codomain domain
 少なくとも $f(A) \subseteq \text{dom}(g)$ が必要である。

逆写像では、 f^{-1} という記号を書く前に、 f が全単射であることを確認する。逆像 $f^{-1}(T)$ は任意の写像で
inverse map bijection preimage map
 定義できるが、逆写像 $f^{-1} : B \rightarrow A$ は全単射でなければ存在しない。
inverse map bijection

→ 講義 写像の基本 lecture math discrete-math

<https://study.bem130.com/lecture/math/discrete-math/写像の基本-講義/>

→ 講義 単射・全射・全単射 lecture math discrete-math

<https://study.bem130.com/lecture/math/discrete-math/単射・全射・全単射-講義/>

4 直感的な説明

合成写像は、機械を直列に接続することに対応する。最初の機械 f に入力 a を入れると $f(a)$ が出力される。
composite map input
 次の機械 g に $f(a)$ を入れると $g(f(a))$ が出力される。したがって全体の機械は $g \circ f$ である。

逆写像は、機械の結果から入力を完全に復元する機械である。もし2つの入力が同じ出力へ潰れてい
inverse map codomain element element
 れば、出力だけを見ても元の入力を選べない。もし終域に届かない元があれば、その元を戻す入力が存在しない。

合成は矢印を左から右へ連結する操作であり、一般には $g \circ f$ と $f \circ g$ は同じではない。型が合わなければ、そもそも合成は定義できない。
composition

5 厳密な説明：逆写像と全単射

$f : A \rightarrow B$ が逆写像 $h : B \rightarrow A$ を持つとする。 $f(a_1) = f(a_2)$ なら、両辺に h を適用して
inverse map 逆写像 全単射

$$h(f(a_1)) = h(f(a_2))$$

えを得る。 $h \circ f = \text{id}_A$ より $a_1 = a_2$ である。したがって f は単射である。
たんしゃ injection

また、任意の $b \in B$ に対して、 $a = h(b)$ と置くと、 $f(a) = f(h(b)) = b$ である。ここで $f \circ h = \text{id}_B$ を用いた。
 したがって f は全射である。
ぜんしゃ surjection

逆ぎやくに f が全単射ぜんたんしゃ bijectionなら、任意の $b \in B$ に対して、 $f(a) = b$ を満たす $a \in A$ が存在し、しかも単射性たんしゃせい injectivityにより一意である。そこで $f^{-1}(b) = a$ と定義できる。この一意性がなければ、逆写像ぎやくしゃぞう inverse mapの値あたい valueが決まらない。

6 例題：合成写像と逆写像

れいだい ごうせいしゃぞう ぎやくしゃぞう composite map inverse map

6.1 問題

もんだい

$A = \{1, 2, 3\}$ 、 $B = \{a, b, c\}$ とし、 $f: A \rightarrow B$ を

$$f(1) = b, \quad f(2) = c, \quad f(3) = a$$

で定義する。 f が全単射であることを確認し、逆写像ぎやくしゃぞう inverse mapを求めよ。
ていぎ ぜんたんしゃ かくにん ぎやくしゃぞう もと bijection inverse map

6.2 解説

かいせつ

$f(1), f(2), f(3)$ はそれぞれ b, c, a であり、互いに異なる。したがって異なる入力にゅうりよく inputは異なる出力しゅつりよく outputへ送られるので、 f は単射である。
たんしゃ injection

また、終域 $B = \{a, b, c\}$ の全ての元すべ げん elementが f の値あたい valueとして現れる。したがって f は全射である。よって f は全単射である。
ぜんたんしゃ bijection

逆写像ぎやくしゃぞう inverse mapは、矢印やじるしを逆向きぎやくむに読むことよで

$$f^{-1}(a) = 3, \quad f^{-1}(b) = 1, \quad f^{-1}(c) = 2$$

となる。

7 見分け方

• $g \circ f$ は先に f 、後に g を適用する。

• 合成写像を作る前に、出力と次の入力の型が合うかを確認する。
composite map

• 逆写像は全単射のときにだけ存在する。
inverse map bijection

• 逆像と逆写像を混同しない。
preimage inverse map

見分けるときは、まず定義域と終域を確認する。逆写像では、片側だけでなく $g \circ f$ と $f \circ g$ の両方が恒等写像になることを確認する。
domain codomain inverse map

8 証明補足：合成で単射・全射が保存される理由

$f: X \rightarrow Y$ 、 $g: Y \rightarrow Z$ とする。 f と g がともに単射なら、 $g \circ f$ も単射である。
injective

証明する。 $(g \circ f)(x_1) = (g \circ f)(x_2)$ とする。これは $g(f(x_1)) = g(f(x_2))$ である。 g が単射なので $f(x_1) = f(x_2)$ である。さらに f が単射なので $x_1 = x_2$ である。したがって $g \circ f$ は単射である。

f と g がともに全射なら、 $g \circ f$ も全射である。 $z \in Z$ を任意に取る。 g が全射なので、ある $y \in Y$ が存在して $g(y) = z$ である。さらに f が全射なので、ある $x \in X$ が存在して $f(x) = y$ である。よって $(g \circ f)(x) = z$ である。

この二つを組み合わせると、全単射の合成はまた全単射である。逆写像が存在することも、単射と全射が同時に成り立つことの言い換えである。
bijection

9 演習リンク

→ 基本演習 写像と単射全射 exercise math discrete-math

<https://study.bem130.com/exercise/math/discrete-math/写像と単射全射-基本演習/>

10 かんれん 関連リンク

→ 講義 写像の基本 lecture math discrete-math

<https://study.bem130.com/lecture/math/discrete-math/写像の基本-講義/>

→ 講義 単射・全射・全単射 lecture math discrete-math

<https://study.bem130.com/lecture/math/discrete-math/単射・全射・全単射-講義/>