

# pullback と形式の積分

## 1 導入

このページの核心は、曲線や曲面をパラメータ表示したとき、微分形式をパラメータ領域へ引き戻して積分することである。

## 2 用語と定義

pullback は、写像  $\phi: U \rightarrow M$  に沿って、 $M$  上の形式を  $U$  上の形式へ移す操作である。

## 3 方針

形式を直接曲線や曲面で積分するのではなく、表示写像で引き戻して、通常の変数に関する積分へ変換する。

## 4 具体例

曲線  $\gamma(t) = (x(t), y(t))$  と 1 形式  $\omega = P dx + Q dy$  に対して、

$$\gamma^* \omega = (P(\gamma(t))x'(t) + Q(\gamma(t))y'(t)) dt$$

である。これは線積分の計算式と一致する。

## 5 曲線上の計算

$\omega = x dy - y dx$ 、 $\gamma(t) = (\cos t, \sin t)$ 、 $0 \leq t \leq 2\pi$  とする。このとき

$$\gamma^* \omega = \cos t(\cos t dt) - \sin t(-\sin t dt) = dt$$

である。したがって  $\int_{\gamma} \omega = 2\pi$  となる。これは単位円の周囲を一周する循環を測る。

## 6 曲面上の計算

2 形式  $\eta = dx \wedge dy$  を、平面片  $\phi(u, v) = (u, v, 0)$  に引き戻すと、 $\phi^* \eta = du \wedge dv$  である。したがって形式の積分は通常  $\eta$  の二重積分へ変換される。

別の例として、半径  $R$  の球面を

$$\phi(\theta, \varphi) = (R \sin \varphi \cos \theta, R \sin \varphi \sin \theta, R \cos \varphi)$$

で表示する。2 形式  $\eta = x dy \wedge dz + y dz \wedge dx + z dx \wedge dy$  は、放射状場  $(x, y, z)$  の flux に対応する。外向きの向きは  $d\varphi \wedge d\theta$  に対応し、引き戻しは

$$\phi^* \eta = R^3 \sin \varphi d\varphi \wedge d\theta$$

であり、積分は  $4\pi R^3$  になる。

## 7 変数変換との関係

pullback は変数変換の幾何的な表現である。Jacobian 行列式は、最高次の形式を引き戻したときの係数として現れる。

たとえば  $\Phi(u, v) = (x(u, v), y(u, v))$  に対して、

$$\Phi^*(dx \wedge dy) = \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} du \wedge dv$$

である。通常の変数変換公式で現れる Jacobian は、面積形式の pullback の係数である。

## 8 対応図

| ベクトル解析                                       | 微分形式                 |
|--|----------------------|
| 線積分 $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$    | 1 形式 $\int_C \omega$ |
| 面積分 $\iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} dS$ | 2 形式 $\int_S \eta$   |
| パラメータ表示                                      | pullback             |

pullback が必要なのは、積分対象が曲線や曲面に存在するのに対し、計算は区間や平面領域で実行するからである。

## 9 反例または注意

向きを反転するパラメータ表示では、最高次形式の積分の符号も反転する。面積だけを求める場合は絶対値が登場するが、形式の積分では向き付けを保持する。

## 10 関連リンク

→ [講義 線積分と保存場](#) [lecture](#) [math](#) [vector-calculus](#)  
<https://study.bem130.com/lecture/math/vector-calculus/線積分と保存場-講義/>