

# wedge 積と外冪

## 1 導入

このページの核心は、wedge 積を記号の装飾ではなく、反対称な面積要素や体積要素を構成する積として確認することである。

## 2 用語と定義

wedge 積は、共ベクトルや形式を組み合わせて、交代性を持つ高次の形式を作る演算である。  
外冪  $\Lambda^k V^*$  は、 $k$  個のベクトルを入力として数を返す交代多重線形形式の空間である。

## 3 基本性質

共ベクトル  $\alpha, \beta$  に対して

$$\alpha \wedge \beta = -\beta \wedge \alpha$$

である。したがって  $\alpha \wedge \alpha = 0$  である。この反対称性が、同じ方向を二回数えないことに対応する。

## 4 代数法則

wedge 積は双線形である。したがって

$$(\alpha + \beta) \wedge \gamma = \alpha \wedge \gamma + \beta \wedge \gamma$$

が成立する。また結合的であり、 $(\alpha \wedge \beta) \wedge \gamma = \alpha \wedge (\beta \wedge \gamma)$  と扱える。反交換性により、1形式どうしでは順序の交換で符号が反転する。

例として、

$$(dx + dy) \wedge dz = dx \wedge dz + dy \wedge dz$$

である。また

$$dy \wedge dx = -dx \wedge dy, \quad dx \wedge dx = 0$$

である。同じ方向を二回入れると面積が潰れるため、0になる。

## 5 具体例

$dx \wedge dy$  は平面の向き付き面積要素として働く。ベクトル  $u = (u_1, u_2), v = (v_1, v_2)$  に対し、

$$(dx \wedge dy)(u, v) = u_1 v_2 - u_2 v_1$$

である。

## 6 外冪の基底

$V^*$  の基底を  $dx, dy, dz$  とする。このとき  $\Lambda^2 V^*$  の基底は

$$dx \wedge dy, \quad dx \wedge dz, \quad dy \wedge dz$$

である。 $\Lambda^3 V^*$  の基底は  $dx \wedge dy \wedge dz$  である。これは向き付き体積要素に対応する。

一般に、 $n$  次元で  $\Lambda^k V^*$  の基底は、 $i_1 < \dots < i_k$  を満たす

$$dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k}$$

で与えられる。個数は二項係数  $\binom{n}{k}$  である。これは「 $k$  方向を重複なく選択する」ことに対応する。

## 7 幾何的な対応

2 次元では  $dx \wedge dy$  が面積を測る。3 次元では  $dx \wedge dy \wedge dz$  が体積を測る。cross product は 3 次元で特殊にベクトルを返す演算であるのに対し、wedge 積は任意次元で形式を返す。

## 8 反例: cross product との混同

$u \times v$  は 3 次元のベクトルであり、方向を持つ。一方、 $\alpha \wedge \beta$  は 2 形式であり、二本のベクトルを入力して数を返す。内積と Hodge star を選択すると 3 次元では対応を作れるが、それは追加構造を使用した後の対応である。

## 9 具体計算

$\alpha = 2dx + dy, \beta = dx + 3dy$  とする。このとき

$$\alpha \wedge \beta = (2dx + dy) \wedge (dx + 3dy) = 6dx \wedge dy - dx \wedge dy = 5dx \wedge dy$$

である。係数 5 は、共ベクトルの係数行列の行列式に一致する。

## 10 どこまで成り立つか

wedge 積は外積という日本語で呼ばれることがあるが、3 次元の cross product とは別の演算である。cross product は内積や向き付けと結合して 3 次元で特殊に成立する。

## 11 関連リンク

→ [講義](#) [微分形式と外微分](#) [lecture](#) [math](#) [exterior-algebra](#)

<https://study.bem130.com/lecture/math/exterior-algebra/微分形式と外微分-講義/>