一般 Stokes 定理とベクトル解析辞書

1 導入

このページの核心は、Green・Gauss・Stokes の定理を別々の公式としてではなく、一般 Stokes 定理の特別例として統一することである。

2 代表式

向き付けられた多様体 M とその境界 ∂M、微分形式 ω に対して

$$\int_M d\omega = \int_{\partial M} \omega$$

が一般 Stokes 定理である。

3 特別例

一次元では、微積分学の基本定理

$$\int_a^b f'(x)\,dx = f(b) - f(a)$$

が一般 Stokes 定理の特別例である。二次元では Green の定理、三次元の曲面では Stokes の定理、三次元の領域では Gauss の発散定理が現れる。

4 ベクトル解析辞書

- 勾配は 0 形式の外微分に対応する。
- 平面の curl は 1 形式の外微分に対応する。
- flux は 2 形式の積分として解釈できる。
- Green・Gauss・Stokes は、領域と境界の次元を変えた同一構造である。

ベクトル解析	微分形式
スカラー場 f	0 形式 f
gradient	df
線積分	1 形式の積分
curl	d と Hodge star の組合せ
flux	2 形式の積分
divergence	d と Hodge star の組合せ

5　変換例

平面の 1 形式 $\omega = P\,dx + Q\,dy$ では、

$$d\omega = (Q_x - P_y)\,dx \wedge dy$$

である。これを領域 D で積分し、境界 ∂D で ω を積分すると Green の定理になる。つまり Green の定理は $\int_D d\omega = \int_{\partial D} \omega$ の二次元版である。

6　Gauss 定理の形式による記述

ベクトル場 $\boldsymbol{F} = (P, Q, R)$ の flux に対応する 2 形式を

$$\eta = P\,dy \wedge dz + Q\,dz \wedge dx + R\,dx \wedge dy$$

とする。このとき

$$d\eta = (P_x + Q_y + R_z)\,dx \wedge dy \wedge dz$$

である。したがって

$$\int_V d\eta = \int_{\partial V} \eta$$

は Gauss の発散定理そのものである。

7　Stokes 定理の形式による記述

3 次元の 1 形式 $\alpha = Pdx + Qdy + Rdz$ に対し、$d\alpha$ は curl の flux に対応する 2 形式である。したがって

$$\int_S d\alpha = \int_{\partial S} \alpha$$

は曲面を通る curl の流束と、境界曲線に沿う循環の一致を述べる。

8　二次元と三次元の図式

二次元では、小領域の境界線が隣接領域どうしで逆向きに現れ、内部で相殺される。三次元では、小体積の内部面が互いに逆向きの法線を持ち、流束が相殺される。残るのは外側の境界だけである。

9　境界の境界が 0 であること

一般 Stokes 定理の背後には、内部境界が互いに相殺される構造がある。この構造は「境界の境界は 0」という幾何的事実に対応する。外微分の $d^2 = 0$ も、この構造の解析的表現である。

10　直感的な説明

内部で測った微小変化を全体で足し合わせると、内部境界の寄与は相殺され、外側の境界だけが残る。この相殺構造を形式と外微分で表現したものが一般 Stokes 定理である。

11　どこまで成り立つか

この定理には、向き付け、滑らかさ、境界の扱いが必要である。特異点や非滑らかな領域では、仮定を再確認する必要がある。

12　関連リンク

→ 講義 **Green・Gauss・Stokes の定理** lecture math vector-calculus
https://study.bem130.com/lecture/math/vector-calculus/Green・Gauss・Stokes の定理-講義/