

がいせきだいすう びぶんけいしき 外積代数・微分形式ポータル

1 導入

このポータルの核心は、外積代数を 3 次元の cross product と同一視せず、面積・体積・積分を座標に依存しにくく記述する代数言語として導入することである。

2 方針

最初に双対空間と共ベクトルを確認する。つぎに多重線形写像と交代性を定義し、wedge 積と外積へ進行する。続いて微分形式・外微分・引き戻し・形式の積分へ接続する。

3 このトラックの責務

3 次元ベクトルの外積は、内積と向き付けを前提にして二本のベクトルから一本のベクトルを作る演算である。このトラックが扱う wedge 積は、それとは別に、反対称な多重線形構造を任意次元で記述する道具である。

ベクトル解析トラックでは grad・div・curl・Green・Gauss・Stokes を古典的な記号で扱う。このトラックの責務は、それらを双対空間、外積、微分形式、外微分、一般 Stokes 定理の言葉で再構成することである。

4 読解順序

標準順序は、dual、multilinear/alternating、wedge、forms、pullback、exterior derivative、Stokes、Hodge、cohomology である。ベクトル解析を既習の読者は、wedge 積、微分形式と外微分、一般 Stokes 定理とベクトル解析辞書の順で最短の対応を確認できる。

5 なぜ dual から始めるか

微分形式は、ベクトルそのものではなく、ベクトルを入力して数を返す共ベクトルや交代多重線形形式を主役にする。そのため、 dx, dy, dz を記号として並べる前に、それらが何に作用するのかを双対空間の言葉で固定する必要がある。

この順序を守ると、 df を勾配の別表記としてではなく、方向へ作用して変化率を返す 1 形式として理解できる。さらに wedge 積も、面積要素や体積要素を作る反対称積として自然に読める。

6 抽象度の目安

段階	内容	役割
低	双対空間, 共ベクトル	ベクトルから数を抽出する
中	多重線形, wedge, 外冪	面積・体積を反対称に扱う
高	微分形式, pullback, 外微分	曲線・曲面への積分を統一する
発展	Hodge star, cohomology	計量や位相との接続を扱う

7 外積との区別

3次元の cross product は \mathbb{R}^3 の内積と向き付けを使用し、二本のベクトルから垂直な一本のベクトルを作る。wedge 積は任意次元で定義され、二本の共ベクトルから 2 形式を作る。結果の型が異なるため、名称が近くても同一の演算として扱わない。

8 必要性

ベクトル解析では、grad・curl・div・line integral・surface integral が別々の記号として現れる。微分形式では、これらを外微分と形式の積分として統一できる。この統一が外積代数を習得する理由である。

9 三つの読解経路

標準経路では、双対空間 → 多重線形写像と交代写像 → wedge 積と外冪 → 微分形式と外微分 → pullback と形式の積分 → 一般 Stokes 定理の順に進む。この経路は定義から積分までを順に積み上げる。ベクトル解析既習者の最短経路では、wedge 積と外冪 → 微分形式と外微分 → 一般 Stokes 定理とベクトル解析辞書の順に進む。この経路では、curl や divergence が何の像として再記述されるかを短距離で確認できる。

抽象重視経路では、dual → 多重線形写像と交代写像 → wedge 積 → Hodge star → de Rham cohomology の順に進む。この経路は、計量や位相との接続を早めに確認したい場合に適している。

10 ベクトル解析との対応

微分形式を学ぶ理由は、ベクトル解析の記号を別名に置換することではない。何が 0 形式で、何が 1 形式で、何が 2 形式であることを区別すると、「積分できる対象の次数」と「外微分で上がる次数」が一貫して読めるようになる。

その結果、Green・Gauss・Stokes は別個の定理ではなく、 $\int_M d\omega = \int_{\partial M} \omega$ という一般 Stokes 定理の特別例として整理できる。この対応は終盤の辞書ページで回収する。

11 がくしゅうじゆんじよ 学習順序

→ [講義](#) [双対空間と共ベクトル](#) [lecture](#) [math](#) [exterior-algebra](#)
<https://study.bem130.com/lecture/math/exterior-algebra/双対空間と共ベクトル-講義/>

→ [講義](#) [多重線形写像と交代写像](#) [lecture](#) [math](#) [exterior-algebra](#)
<https://study.bem130.com/lecture/math/exterior-algebra/多重線形写像と交代写像-講義/>

→ [講義](#) [wedge 積と外冪](#) [lecture](#) [math](#) [exterior-algebra](#)
<https://study.bem130.com/lecture/math/exterior-algebra/wedge 積と外冪-講義/>

→ [講義](#) [微分形式と外微分](#) [lecture](#) [math](#) [exterior-algebra](#)
<https://study.bem130.com/lecture/math/exterior-algebra/微分形式と外微分-講義/>

→ [講義](#) [pullback と形式の積分](#) [lecture](#) [math](#) [exterior-algebra](#)
<https://study.bem130.com/lecture/math/exterior-algebra/pullback と形式の積分-講義/>

→ [講義](#) [Hodge star の入口](#) [lecture](#) [math](#) [exterior-algebra](#)
<https://study.bem130.com/lecture/math/exterior-algebra/Hodge star の入口-講義/>

→ [講義](#) [一般 Stokes 定理とベクトル解析辞書](#) [lecture](#) [math](#) [exterior-algebra](#)
<https://study.bem130.com/lecture/math/exterior-algebra/一般 Stokes 定理とベクトル解析辞書-講義/>

→ [講義](#) [de Rham cohomology の入口](#) [lecture](#) [math](#) [exterior-algebra](#)
<https://study.bem130.com/lecture/math/exterior-algebra/de Rham cohomology の入口-講義/>

12 ちゆうい 注意

じげん がいせき にほん いっぽん つく えんざん がいせきだいすう せき めんせきようそ
3次元の外積は、二本のベクトルから一本のベクトルを作る演算である。外積代数の wedge 積は、面積要素
たいせきようそ あつか はんたいしやう せき ていぎ いち こと
や体積要素を扱う反対称な積であり、定義の位置が異なる。

13 かんれん 関連リンク

→ [講義](#) [外積の基本](#) [lecture](#) [math](#) [vector](#)
<https://study.bem130.com/lecture/math/vector/外積の基本-講義/>

→ [講義](#) [Green・Gauss・Stokes の定理](#) [lecture](#) [math](#) [vector-calculus](#)
<https://study.bem130.com/lecture/math/vector-calculus/Green・Gauss・Stokes の定理-講義/>