多重線形写像と交代写像

1 導入

このページの核心は、面積や体積を測る量には、各変数に線形であり、同じ方向が重複すると 0 になる性質が必要であることを確認することである。

2 用語と定義

多重線形写像 (Multilinear map) は、複数の入力を持ち、どの入力についても他を固定すれば線形になる写像である。
交代写像 (Alternating map) は、二つの入力を入れ替えると符号が反転し、同じ入力が重複すると 0 になる写像である。

3 方針

面積は、一方の辺を二倍にすれば二倍になる。また二本の方向が平行なら面積は 0 になる。この直感を代数条件として抽出したものが交代多重線形性である。

4 具体例

$\mathbb{R}^2$ で

$$A(u,v) = u_1v_2 - u_2v_1$$

と定義する。これは二つのベクトルが張る平行四辺形の符号付き面積であり、交代双線形である。
交換を確認すると、

$$A(v,u) = v_1u_2 - v_2u_1 = -(u_1v_2 - u_2v_1) = -A(u,v)$$

である。また $A(u,u) = 0$ である。同じ方向の二本のベクトルは平行四辺形を張らないため、面積が 0 になる。この幾何が交代性の背景である。

5 段階的な区別

双線形とは、二つの入力の各々について線形であることを意味する。多重線形とは、入力が三つ以上の場合にも同じ性質を要求することである。交代性は、入力の入れ替えで符号が変化する追加条件である。

6 体積の例

$\mathbb{R}^3$ で

$$V(u,v,w) = \det(u\ v\ w)$$

と定義する。これは三つのベクトルが張る平行六面体の符号付き体積であり、交代三重線形である。二つの入力を入れ替えると行列式の符号が反転する。

標準基底 e_1, e_2, e_3 に対して $V(e_1, e_2, e_3) = 1$ である。e_2, e_1, e_3 の順に入れ替えると -1 になる。e_1, e_1, e_3 のように同じ方向が重複すると 0 である。この三つの値が、向き・符号・退化を同時に表す。

7 反例: 内積は交代ではない

$B(u, v) = u \cdot v$ は双線形であるが、交代ではない。$B(v, u) = B(u, v)$ であり、入力を交換しても符号は反転しない。また $B(u, u) = |\ u\ |^2$ は一般に 0 ではない。したがって長さや角度を測る内積と、向き付き面積を測る交代形式は別概念である。

8 determinant との関係

行列式は、列ベクトルに対する交代多重線形形式であり、標準基底に対して値 1 を取るように正規化されている。この特徴付けにより、置換和の公式だけでなく、面積・体積の符号付き拡大率として理解できる。

9 wedge 積への必然性

面積や体積を座標に依存しにくく扱うには、交代多重線形な対象を体系的に生成する演算が必要である。その演算が wedge 積である。

10 関連リンク

→ 講義 **wedge 積と外冪** lecture math exterior-algebra
https://study.bem130.com/lecture/math/exterior-algebra/wedge 積と外冪-講義/