

図形と方程式の基本

1 導入

この講義で最重要なのは、図形の条件を「点 $P(x, y)$ が何を満たすか」という式へ直すことです。図形と方程式で混乱しやすいのは、直線や円の公式を覚えても、「この式はどの点の集まりを表しているのか」が見えないことです。この講義では、点の満たす条件から図形を作る見方を中心にします。

2 用語と定義

軌跡とは、ある条件を満たす点の集まりです。

距離は、2点 $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$ に対して

$$AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

で与えられます。

3 方針

まず点 $P(x, y)$ を置き、その点満たす条件を式にします。そのあと、得られた式を整理して、直線なのか円なのか、あるいは別の図形なのかを読み取ります。

4 直感的な説明

直線も円も、「点がどういう条件を満たすか」で決まります。たとえば円は「ある1点からの距離が一定な点の集まりです。この言葉をそのまま式にしたものが円の方程式です。

5 厳密な説明

5.1 1. 直線

直線 $y = mx + n$ は、 x を1つ決めると y が1つに決まる点の集まりです。傾き m と切片 n は、向きと高さを表します。

5.2 2. 円

中心 $C(a, b)$ 、半径 r の円は、「 $P(x, y)$ が C からの距離 r を満たす」という条件から

$$\sqrt{(x - a)^2 + (y - b)^2} = r$$

を得ます。これを二乗して

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$$

です。

5.3 3. 平方完成で中心を読む

$$x^2 + y^2 - 2x + 4y - 4 = 0$$

のような式は、そのままでは図形が見えにくいですが、

$$x^2 - 2x = (x - 1)^2 - 1, \quad y^2 + 4y = (y + 2)^2 - 4$$

と変形すると

$$(x - 1)^2 + (y + 2)^2 = 9$$

となり、中心 $(1, -2)$ 、半径 3 の円だと分かります。

6 別の見方

図形としては「距離が一定」「傾きが一定」という条件を見る分野です。計算としては、点 $P(x, y)$ を置いて条件を式へ落とす分野です。この 2 つを往復できると、軌跡や領域も扱いやすくなります。

7 見分け方

- 点が動く問題では、まず $P(x, y)$ を置いて条件を書きます。
- x^2 と y^2 が対称的に出てきたら、円を疑います。
- 平方完成をすると中心や半径が読み取れる形が見えます。

8 最終形

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$$

9 一言でいうと

- 図形と方程式では、点の条件を式に直せるかが核心です。