

# ベクトルの基本演算

## 1 導入

この講義で重要なものは、ベクトルを矢印としてだけでなく、成分を持つ計算対象として扱うことである。線型代数では、ベクトルの和、差、スカラー倍、線型結合がすべての入口になる。図形的な意味だけでなく、成分ごとの計算として実行できることが必要である。

→ [講義](#) ベクトルとは何か [lecture](#) [math](#) [vector](#)  
<https://study.bem130.com/lecture/math/vector/ベクトルとは何か-講義/>

## 2 用語と定義

ベクトルとは、複数の数を順序つきで並べた対象である。 $\mathbb{R}^n$  のベクトルは

$$v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$$

と表す。

零ベクトルとは、全成分が0のベクトルであり、加法の基準になる。

標準基底とは、 $\mathbb{R}^n$  で1つの成分だけが1、他が0のベクトルからなる基底である。

列ベクトルは成分を縦に並べたベクトルであり、行ベクトルは成分を横に並べたベクトルである。行列

との積では形とサイズ条件が重要になる。

スカラーとは、ベクトルを拡大・縮小する係数である。ここでは実数を基本にする。

線型結合とは、ベクトルにスカラーを掛けて加えた  $c_1v_1 + \dots + c_kv_k$  の形である。

## 3 方針

まず2次元で成分ごとの計算を確認し、そのあとn次元へ拡張する。線型代数では、次元が増加しても規則は成分ごとのまま維持される。

## 4 直感的な説明

ベクトルの和は、移動を続けて実行することに対応する。スカラー倍は、同じ方向の移動量を変更することに対応する。

成分表示では、この操作を各座標で別々に実行する。したがって、ベクトル演算は複雑な規則ではなく、座標軸ごとの同型な計算である。

## 5 厳密な説明

$u = (u_1, \dots, u_n)^T$ 、 $v = (v_1, \dots, v_n)^T$  とする。ベクトルの和と差は

$$u + v = (u_1 + v_1, \dots, u_n + v_n)^T$$

$$u - v = (u_1 - v_1, \dots, u_n - v_n)^T$$

で定義する。スカラー  $c$  に対して

$$cu = (cu_1, \dots, cu_n)^T$$

である。この定義により、和とスカラー倍が同時に扱える。たとえば

$$c_1v_1 + c_2v_2$$

は、2本のベクトルを係数つきで合成した線型結合である。

## 6 具体例

$u = (1, 2)^T$ 、 $v = (3, -1)^T$  とする。このとき

$$u + v = (4, 1)^T, \quad u - v = (-2, 3)^T$$

である。また

$$2u - 3v = 2(1, 2)^T - 3(3, -1)^T = (-7, 7)^T$$

となる。この計算では、第一成分と第二成分を独立に処理している。

## 7 よくある誤解

- ベクトルを点そのものと同一視しない。点は位置であり、ベクトルは移動量や成分を表す対象である。
- 次元が増加しても、和とスカラー倍の規則は成分ごとである。
- 線型結合は単なる足し算ではなく、係数を自由に選択して方向を合成する操作である。

## 8 どこまで成り立つか

ここでは実数をスカラーにした。スカラーを複素数にすると複素ベクトル空間になる。基本演算の形は同じだが、内積や角度では共役の扱いが必要になる。

## 9 最終形

$$u + v = (u_1 + v_1, \dots, u_n + v_n)^T$$

$$cu = (cu_1, \dots, cu_n)^T$$

$c_1v_1 + \dots + c_kv_k$  が線型結合である

$$v = v_1 e_1 + \dots + v_n e_n \quad (\text{standard basis})$$

## 10 一言でいうと

- ベクトルの基本演算は、成分ごとの計算として実行され、線型結合が後続の基底と階数の入口になる。

## 11 演習リンク

→ 基本演習 ベクトルと線型結合 [exercise](#) [math](#) [linear-algebra](#)  
<https://study.bem130.com/exercise/math/linear-algebra/ベクトルと線型結合-基本演習/>

## 12 関連リンク

→ 講義 線型結合と張る空間の基本 [lecture](#) [math](#) [linear-algebra](#)  
<https://study.bem130.com/lecture/math/linear-algebra/線型結合と張る空間の基本-講義/>

→ 講義 行列の基本演算 [lecture](#) [math](#) [linear-algebra](#)  
<https://study.bem130.com/lecture/math/linear-algebra/行列の基本演算-講義/>

→ 講義 零ベクトル・逆ベクトル・標準基底 [lecture](#) [math](#) [vector](#)  
<https://study.bem130.com/lecture/math/vector/零ベクトル・逆ベクトル・標準基底-講義/>

→ 講義 行ベクトルと列ベクトル [lecture](#) [math](#) [vector](#)  
<https://study.bem130.com/lecture/math/vector/行ベクトルと列ベクトル-講義/>

→ 講義 ベクトルと内積 [lecture](#) [math](#) [vector](#)  
<https://study.bem130.com/lecture/math/vector/ベクトルと内積-講義/>