

# ベクトル空間と基底

basis

## 1 導入

線型代数で最重要なのは、「どんなベクトルが生成できるか」と「その表示が一意的か」を区別して考察することである。

基底をただ「便利なベクトルの組」として暗記すると、生成と一次独立がなぜ別々に必要なかが不明瞭になる。この講義では、まず「全体を生成すること」と「表示が重複しないこと」を分離し、その2つが同時に成立したものととして基底を定式化する。

## 2 用語と定義

ベクトル空間とは、体  $K$  の元をスカラーとし、加法とスカラー倍が定義され、零ベクトル、逆元、結合法則、交換法則、分配法則などの公理を満たす集合である。

抽象ベクトル空間とは、成分の形に依存せず、加法とスカラー倍の公理だけで扱うベクトル空間である。 $\mathbb{R}^n$  や  $\mathbb{C}^n$  だけでなく、多項式、関数、行列の集合も条件を満たせばベクトル空間になる。

生成とは、与えられたベクトルの線型結合で構成できる全体である。

一次独立とは、自明な組合わせだけが0を構成することを意味する。

基底とは、生成と一次独立を同時に満たす集合である。

## 3 方針

基底を理解するには、まず「生成できるか」と「表示が重複しないか」を分離する。

→ [講義 線型結合と張る空間の基本](#) [lecture](#) [math](#) [linear-algebra](#)  
<https://study.bem130.com/lecture/math/linear-algebra/線型結合と張る空間の基本-講義/>

→ [講義 内積空間の基本](#) [lecture](#) [math](#) [linear-algebra](#)  
<https://study.bem130.com/lecture/math/linear-algebra/内積空間の基本-講義/>

## 4 直感的な説明

### 4.1 1. 「足りる」と「余分がない」を分ける

基底は、空間を表現するための「過不足のない部品」である。少なすぎると全体を生成できず、多すぎると同じベクトルに複数の表示が生じる。

## 4.2 2. 平面の例

$\mathbb{R}^2$  では、 $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$  があれば任意のベクトルを表現できる。これは「生成できる」ということである。  
 一方で、 $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$  の3本を採用すると、確かに全体を生成できるが1本が余分である。たとえば

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

なので、独立ではない。

## 4.3 3. 基底とは何か

したがって基底とは、「全体を生成できる」かつ「表示に重複がない」集合である。これを厳密に表現すると、生成と一次独立になる。

このように定義する理由は、座標を一意に決定するためである。生成だけでは全体を覆っても重複が生じうるし、一次独立だけでは重複がなくても全体を表現できない。2つを同時に要求してはじめて、「どのベクトルもただ1通りに座標化できる」という目的に到達する。

# 5 厳密な説明

## 5.1 0. ベクトル空間の公理を置く理由

足し算とスカラー倍で閉じているだけでは、ベクトル空間とは判定できない。線型結合を安定して扱うには、計算規則が整合している必要がある。

たとえば  $u, v, w \in V, a, b \in K$  に対して、加法の交換法則・結合法則、零ベクトル  $0$  の存在、反対ベクトル  $-v$  の存在、および

$$a(u + v) = au + av, \quad (a + b)v = av + bv, \quad a(bv) = (ab)v$$

が要請される。これらの公理によって、多項式、関数、行列のように形の異なる対象も、同じ線型の言語で処理できる。

## 5.2 1. 一次独立

ベクトル  $v_1, \dots, v_k$  が一次独立であるとは

$$c_1 v_1 + \dots + c_k v_k = 0 \Rightarrow c_1 = \dots = c_k = 0$$

であることである。

この条件は、「 $0$  を構成するための余計な関係式がない」ことを意味する。したがって直感的な説明で示した「余分がない」に対応する。

## 5.3 2. 生成

また  $v_1, \dots, v_k$  が空間  $V$  を生成するとは、任意の  $v \in V$  が

$$v = c_1 v_1 + \dots + c_k v_k$$

と表示できることである。

この条件は、「全体を生成できる」に対応する。

### 5.4 3. 基底

したがって基底とは、この2つを同時に満たすものである。

ここで重要なのは、この定義を採ると「各ベクトルの座標がただ1つに決定される」ことである。実際、

$v$ が

$$v = c_1 v_1 + \dots + c_k v_k = d_1 v_1 + \dots + d_k v_k$$

と2通りに表示できたとすると、

$$(c_1 - d_1)v_1 + \dots + (c_k - d_k)v_k = 0$$

となる。一次独立より

$$c_1 - d_1 = \dots = c_k - d_k = 0$$

したがって

$$c_1 = d_1, \dots, c_k = d_k$$

である。つまり基底とは、ただ空間を生成するだけでなく、座標表示を一意にするための定義も兼ねる。

この証明の意義は大きい。基底を選択すると「ベクトルそのもの」と「その座標」が1対1に対応するこ

とが保証される。したがって線型代数では、抽象的な空間の問題を座標の計算へ変換しても意味が失われない。

この対応を座標写像という。順序つき基底  $B = (v_1, \dots, v_n)$  を選択すると、各  $v \in V$  は一意に

$$v = c_1 v_1 + \dots + c_n v_n$$

と表示される。この係数を並べた

$$[v]_B = \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}$$

が  $B$  に関する座標である。つまり基底を選択することは、抽象ベクトルを数の列へ移す座標写像を構成

することである。この座標写像が、線型写像を行列で表現する入口になる。

→ 講義 線型写像と行列 [lecture](#) [math](#) [linear-algebra](#)  
<https://study.bem130.com/lecture/math/linear-algebra/線型写像と行列-講義/>

### 5.5 4. 具体例

$\mathbb{R}^2$  で

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

を考察すると、任意の

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = x e_1 + y e_2$$

と表示できるため、生成している。

また

$$c_1e_1 + c_2e_2 = 0$$

なら

$$\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

したがって  $c_1 = c_2 = 0$  である。このため  $e_1, e_2$  は一次独立であり、基底である。

### 5.6 5. 抽象化の例

ベクトル空間は、矢印だけを扱う概念ではない。たとえば実数係数の2次以下の多項式全体

$$P_2 = \{a + bx + cx^2 \mid a, b, c \in \mathbb{R}\}$$

は、 $1, x, x^2$  を基底にもつ3次元ベクトル空間である。また、区間  $[0, 1]$  の上の連続関数全体や、 $m \times n$  行列全体も、適切な加法とスカラー倍によりベクトル空間となる。

この抽象化により、微分を関数空間の線型写像として扱ったり、行列を基底で座標化したりできる。ベクトル空間の定義は、異なる対象を統一的に記述するための枠組みである。

### 5.7 6. 実数と複素数で何がかわるか

ベクトル空間では、どの体をスカラーとして使うかを明示する。同じ集合でも、実数をスカラーにするか、複素数をスカラーにするかで、一次独立や次元の読み方が変わることがある。

たとえば  $\mathbb{C}$  は、複素数体  $\mathbb{C}$  上では1次元である。一方、実数体  $\mathbb{R}$  上では  $1, i$  を基底として2次元である。

したがって「次元」や「基底」は、必ず基礎体と一緒に読む。

内積を入れると、この差はさらに重要になる。実内積では対称性を使うが、複素内積では共役対称性を使う。

→ 講義 複素内積とユニタリ行列 [lecture](#) [math](#) [linear-algebra](#)  
<https://study.bem130.com/lecture/math/linear-algebra/複素内積とユニタリ行列-講義/>

### 5.8 7. 基底の本数が一定になる理由

有限次元で次元を定義できるのは、どの基底を採用しても本数が同じになるためである。この事実の基礎にあるのが交換補題である。

交換補題の内容は、一次独立な組  $v_1, \dots, v_k$  と、 $V$  を生成する組  $w_1, \dots, w_m$  があるとき、 $v_1$  をどれか1本の  $w_j$  と交換しても生成を保てる、というものである。この交換を順に反復すると、一次独立な本数は生成集合の本数を超えられないことが判明する。

したがって、 $B$  と  $C$  がともに基底なら、 $B$  は一次独立で  $C$  は生成するため  $|B| \leq |C|$  である。役割を交換すると  $|C| \leq |B|$  であり、結局  $|B| = |C|$  となる。このため次元は基底の選択に依存しない。

## 6 別の観点

計算の立場では、基底はベクトルを座標で表現するための基準である。構造の立場では、その空間を過不足なく生成するための最小限の部品である。この2つを結合しておくと、後続の線型写像や行列で基底の意味が安定する。

## 7 どこまで成り立つか

有限次元ベクトル空間では、どの基底を選択しても要素数は同じである。これが次元である。この事実が重要なのは、基底の選択によらず、その空間そのものの大きさを数で表現できるからである。たとえば  $\mathbb{R}^2$  では、どの基底を採用しても2本で十分であり、3本あれば一次独立にはできない。この事実は交換補題により保証される。掃き出しで残る自由度の本数も、この基底の本数に対応する。つまり次元は、空間を表すのに必要な独立な方向の数である。一方で無限次元では、基底の扱いに慎重さを要する。また、生成だけ、あるいは一次独立だけでは基底にはならない。2つを分離して確認することが重要である。

## 8 最終形

基底 = 生成 + 一次独立

生成は「足りる」、一次独立は「余分がない」

基底を選ぶと座標表示は一意に定まる

有限次元では基底の本数は交換補題により一定である

基底を選ぶと座標写像  $[\cdot]_B : V \rightarrow K^n$  が定まる

## 9 一言でいうと

- 基底は、「生成する」かつ「一次独立である」ベクトル集合である。
- 問題では、まず生成を確認し、つぎに一次独立性を判定する。

## 10 演習リンク

→ [基本演習](#) ベクトル空間・基底・階数 [exercise](#) [math](#) [linear-algebra](#)  
<https://study.bem130.com/exercise/math/linear-algebra/ベクトル空間・基底・階数-基本演習/>

## 11 かんれん 関連リンク

→ 講義 **線型写像と行列** lecture math linear-algebra  
<https://study.bem130.com/lecture/math/linear-algebra/線型写像と行列-講義/>

→ 講義 **線型結合と張る空間の基本** lecture math linear-algebra  
<https://study.bem130.com/lecture/math/linear-algebra/線型結合と張る空間の基本-講義/>

→ 講義 **内積空間の基本** lecture math linear-algebra  
<https://study.bem130.com/lecture/math/linear-algebra/内積空間の基本-講義/>

→ 講義 **階数の基本** lecture math linear-algebra  
<https://study.bem130.com/lecture/math/linear-algebra/階数の基本-講義/>

→ 講義 **固有値と固有ベクトル** lecture math linear-algebra  
<https://study.bem130.com/lecture/math/linear-algebra/固有値と固有ベクトル-講義/>