余因子展開と可逆性の判定

1 導入

この講義で重要なのは、**余因子展開は高次の行列式を低次の行列式へ分解する方法であり、可逆性の判定に直結する**ということである。

3×3 以上の行列式を暗算で処理しようとすると混乱しやすい。余因子展開では、1 行または 1 列を選択し、小行列式へ還元する。

2 用語と定義

小行列式とは、A の第 i 行と第 j 列を除いて得られる行列の行列式である。

余因子は

$$C_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$$

で定義される。ここで M_{ij} は小行列式である。

3 方針

零が多い行または列を選択し、計算量を減らす。余因子展開は任意の行・列で可能だが、零成分が多い場所を選ぶと計算が短縮される。

→ 講義 行列式の計算規則 lecture math linear-algebra
https://study.bem130.com/lecture/math/linear-algebra/行列式の計算規則-講義/

4 直感的な説明

余因子展開は、高次元の体積を、1 方向を基準にして低次元の断面へ分解する見方である。3 次元の体積を「底面積×高さ」として読むように、行列式でも 1 行または 1 列を選び、その成分を係数として低次の行列式を足し合わせる。

計算上は、0 が多い行や列を選ぶほど楽になる。0 の成分に対応する小行列式は寄与しないため、大きな行列式を少ない項に分解できる。

可逆性の判定では、行列式が 0 でないかだけを最終的に確認する。余因子展開はその値を計算する道具であり、行列式が体積の伸縮率を表すという直感は次のページで扱う。

→ 講義 行列式 lecture math linear-algebra
https://study.bem130.com/lecture/math/linear-algebra/行列式-講義/

5 厳密(げんみつ)な説明(せつめい)

第(だい) i 行(ぎょう / row)で展開(てんかい)すると

$$\det A = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} C_{ij}$$

である。第(だい) j 列(れつ / column)で展開(てんかい)すると

$$\det A = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} C_{ij}$$

である。符号(ふごう) $(-1)^{i+j}$ は、市松模様(いちまつもよう)のように交互(こうご)に変化(へんか)する。

6 具体例(ぐたいれい)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

を第一行(だいいちぎょう)で展開(てんかい)する。

$$\det A = 1 \det \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} - 0 \det \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + 2 \det \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$$

したがって

$$\det A = 1(1) + 2(12) = 25$$

である。$\det A \neq 0$ なので A は可逆(かぎゃく / invertible)である。

7 可逆性(かぎゃくせい)との関係(かんけい)

A が n×n 行列(ぎょうれつ / matrix)のとき、

$$\boxed{A \text{ は可逆} \iff \det A \neq 0}$$

である。行列式(ぎょうれつしき / determinant)が 0 なら、列(れつ)ベクトル(column vector)が一次従属(いちじじゅうぞく / linear dependence)になり、空間(くうかん)の体積(たいせき)が 0 に潰(つぶ)れる。したがって 入力(にゅうりょく) を一意(いちい)に復元(ふくげん)できない。

8 よくある誤解(ごかい)

- 余因子展開(よいんしてんかい)で符号(ふごう) $(-1)^{i+j}$ を忘(わす)れてはならない。
- どの 行(ぎょう / row)・列(れつ / column) で展開(てんかい)しても 値(あたい) は同(おな)じだが、計算量(けいさんりょう)は大(おお)きく変化(へんか)する。
- $\det A = 0$ は計算失敗(けいさんしっぱい)ではなく、可逆(かぎゃく / invertible)でないことを示(しめ)す構造的(こうぞうてき)な 情報(じょうほう) である。

9　どこまで成り立つか

余因子展開は任意の n×n 行列に適用できる。しかし大規模な行列では計算量が急増するため、実用上は行基本変形や数値的な分解を用いる。

10　最終形

$$\boxed{\det A = \sum_j a_{ij} C_{ij}}$$

$$\boxed{C_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}}$$

$$\boxed{A \text{ は可逆} \iff \det A \neq 0}$$

11　演習リンク

→ 基本演習 **行列式と可逆性** exercise math linear-algebra
https://study.bem130.com/exercise/math/linear-algebra/行列式と可逆性-基本演習/

12　関連リンク

→ 講義 **行列式** lecture math linear-algebra
https://study.bem130.com/lecture/math/linear-algebra/行列式-講義/

→ 講義 **逆行列の基本** lecture math linear-algebra
https://study.bem130.com/lecture/math/linear-algebra/逆行列の基本-講義/