内積空間の基本

inner product space

1 導入

この講義で最重要なのは、内積を導入すると、ただのベクトル空間に長さと角度の概念が加わり、直交や最短といった幾何学的な概念を扱えるようになることである。

ベクトル空間だけでは、「加法が可能である」「実数倍が可能である」という代数的な構造しか存在しない。しかし内積があると、「この 2 つはどれだけ同じ向きを向いているか」「この長さはどれくらいか」を数値で表現できる。ここから直交基底や最小二乗法へ接続する。

2 用語と定義

内積空間とは、ベクトル空間に内積が定義されたものである。

実内積とは、2 つのベクトル u, v に実数 $\langle u, v\rangle$ を対応させ、双線型性、対称性、正定値性を満たす写像である。

複素内積とは、複素ベクトル空間で共役対称性と半線型性を含む内積である。このノートでは第 1 変数を線型、第 2 変数を共役線型とする。

エルミート内積は、複素内積とほぼ同じ意味で使われる用語である。以後の共役転置、随伴、ユニタリ行列では、この規約が前提になる。

ノルムとは、内積から

$$\| v \| = \sqrt{\langle v, v\rangle}$$

で定義される長さである。

3 方針

まず高校の内積 $u \cdot v$ で、どの性質が長さや直交を支えていたかを抽出する。そのあと、実数の場合と複素数の場合で公理がどう変化するかを確認する。

→ 講義 ベクトル空間と基底 lecture math linear-algebra
https://study.bem130.com/lecture/math/linear-algebra/ベクトル空間と基底-講義/

→ 講義 ベクトルと内積 lecture math vector
https://study.bem130.com/lecture/math/vector/ベクトルと内積-講義/

→ 講義 複素内積とユニタリ行列 lecture math linear-algebra
https://study.bem130.com/lecture/math/linear-algebra/複素内積とユニタリ行列-講義/

4 直感的な説明

高校で学ぶ内積 $u \cdot v$ は、「長さの積に、向きの類似度を掛けたもの」と解釈できる。同じ向きなら大きく、直角なら 0、逆向きなら負になる。この性質だけを抽象化したものが内積空間である。

5 厳密な説明

5.1 1. 内積の公理

内積の定義で重要なのは、「平面の点積で成立していた、長さと角度を扱うのに必要な性質だけを抽出する」ことである。

線型性があると、和や実数倍に対する計算が容易になる。対称性があると、「u と v の関係」を向きを交換しても同じ量として測定できる。正定値性があると、$\langle v, v\rangle$ を長さの 2 乗として解釈しても矛盾しない。

実内積空間では、任意のベクトル u, v, w と実数 a に対して

$$\langle u+v, w\rangle = \langle u, w\rangle + \langle v, w\rangle$$

$$\langle au, v\rangle = a\langle u, v\rangle$$

$$\langle u, v\rangle = \langle v, u\rangle$$

$$\langle v, v\rangle \geq 0, \qquad \langle v, v\rangle = 0 \Leftrightarrow v = 0$$

が成立する。

5.2 2. 複素内積空間

複素ベクトル空間では、対称性をそのまま用いない。単純な対称性では $\langle iv, iv\rangle$ の正定値性と整合しないため、共役を含む定義を採用する。

このノートの規約では、

$$\langle au+bv, w\rangle = a\langle u, w\rangle + b\langle v, w\rangle$$

$$\langle u, av+bw\rangle = \overline{a}\langle u, v\rangle + \overline{b}\langle u, w\rangle$$

$$\langle u, v\rangle = \overline{\langle v, u\rangle}$$

$$\langle v, v\rangle \geq 0, \qquad \langle v, v\rangle = 0 \Leftrightarrow v = 0$$

が成立する。実内積は、この複素内積から共役が不要になった場合として理解できる。

5.3 3. 長さと直交

内積があれば

$$\| v \| = \sqrt{\langle v, v\rangle}$$

で長さを定義できる。ここで正定値性があるため、根号の中は 0 以上で、しかも $v \neq 0$ なら正になる。したがってこの定義は長さとして自然である。

また

$$\langle u, v \rangle = 0$$

のとき、u と v は直交するという。これは高校で $u \cdot v = |\, u \,|\,|\, v \,| \cos\theta$ だったことを想起すると自然である。$\cos\theta = 0$ の状況を抽象化すると、「内積が 0 なら直交」という定義になる。

5.4 4. 高校の内積との関係

$u = (u_1, u_2), v = (v_1, v_2)$ とすると

$$\langle u, v \rangle = u_1 v_1 + u_2 v_2$$

は高校で用いる内積そのものである。したがって内積空間は、高校の図形的な感覚を一般化した概念として理解できる。

5.5 5. 内積から導出される重要な不等式

内積があると、コーシー・シュワルツの不等式

$$|\, \langle u, v \rangle \,| \le \|\, u \,\| \|\, v \,\|$$

が成立する。これは角度を定義したり、射影を考察したりするときの土台である。

証明の発想は、「長さの 2 乗は負にならない」という正定値性を用いることである。まず実内積空間では、任意の実数 t に対して

$$\|\, u - tv \,\|^2 = \langle u - tv, u - tv \rangle$$

は 0 以上である。これを展開すると

$$\|\, u - tv \,\|^2 = \langle u, u \rangle - 2t \langle u, v \rangle + t^2 \langle v, v \rangle$$

となる。これは t の 2 次式で、すべての t で 0 以上であるため、判別式は 0 以下である。したがって

$$4 \langle u, v \rangle^2 - 4 \langle u, u \rangle \langle v, v \rangle \le 0$$

すなわち

$$\langle u, v \rangle^2 \le \langle u, u \rangle \langle v, v \rangle$$

である。ここで $\langle u, u \rangle = \|\, u \,\|^2$、$\langle v, v \rangle = \|\, v \,\|^2$ を用いれば

$$|\, \langle u, v \rangle \,| \le \|\, u \,\| \|\, v \,\|$$

を得る。

複素内積空間では、判別式による実数 t の議論だけでは不十分である。このノートの規約では第 1 変数が線型なので、$v \neq 0$ のとき

$$\alpha = \frac{\langle u, v \rangle}{\langle v, v \rangle}$$

と置く。すると

$$\langle u - \alpha v, v \rangle = 0$$

である。分母の $\langle v, v\rangle$ は、$v \neq 0$ と正定値性により正の実数なので、0 除算は起きない。また、このノートでは第 1 変数を線型にしているため、α は上の形になる。第 2 変数を線型とする流儀では共役の位置が変わる。

この選び方により $u - \alpha v$ は v に直交する。つまり、u を v 方向の成分と、それに直交する成分へ分けている。直交分解により

$$\| u \|^2 = | \alpha |^2 \| v \|^2 + \| u - \alpha v \|^2 \geq | \alpha |^2 \| v \|^2$$

を得る。したがって

$$\| u \|^2 \geq \frac{| \langle u, v\rangle |^2}{\| v \|^2}$$

となり、同じ不等式が成立する。$v = 0$ の場合は自明である。

実内積空間では、$u \neq 0, v \neq 0$ なら

$$\cos\theta = \frac{\langle u, v\rangle}{\| u \| \| v \|}$$

と定義しても、コーシー・シュワルツの不等式によって右辺はかならず -1 から 1 の間に入る。したがって逆余弦を用いて角度 θ を定義できる。つまりコーシー・シュワルツの不等式は、外形上は単なる評価式であるが、内積空間で角度を記述するための基礎そのものである。

複素内積空間では $\langle u, v\rangle$ が一般に複素数であるため、$\langle u, v\rangle / (\| u \| \| v \|)$ をそのまま $\cos\theta$ として使用しない。複素数そのものは大小関係を持たず、逆余弦の入力として扱えないためである。複素の場合は、まず

$$| \langle u, v\rangle | \leq \| u \| \| v \|$$

と直交性 $\langle u, v\rangle = 0$ を基本にする。角度を導入する場合は、実部を用いるか、実内積空間として扱い直すかを明示する必要がある。

6 どこまで成り立つか

この講義の角度の式は実内積空間を基本にする。複素内積空間では、どちらの変数を線型とするかの規約に応じて射影や直交展開の係数に共役が現れる。定義の段階で実と複素を区別することが重要である。

7 判定基準

- 長さ、角度、直交、射影のような概念が出現したら、内積を導入した空間として解釈する必要がある。
- 線型代数で「基底を選択する」とき、ただ一次独立なだけでなく直交まで要求するなら、内積空間の議論である。
- 最小二乗やフーリエ級数の入口においても、背景にあるのは内積である。

8 最終形

$$\boxed{\| v \| = \sqrt{\langle v, v \rangle}}$$

$$\boxed{\langle u, v \rangle = 0 \Rightarrow u, v \text{ は直交}}$$

$$\boxed{\text{複素内積では共役対称性を用いる}}$$

9 一言でいうと

- 内積空間は、ベクトル空間に長さと角度を導入するための枠組みである。

10 演習リンク

→ 基本演習 **内積・直交・射影** exercise math linear-algebra
https://study.bem130.com/exercise/math/linear-algebra/内積・直交・射影-基本演習/

11 関連リンク

→ 講義 **ベクトル空間と基底** lecture math linear-algebra
https://study.bem130.com/lecture/math/linear-algebra/ベクトル空間と基底-講義/

→ 講義 **ノルムと三角不等式** lecture math linear-algebra
https://study.bem130.com/lecture/math/linear-algebra/ノルムと三角不等式-講義/

→ 講義 **複素内積とユニタリ行列** lecture math linear-algebra
https://study.bem130.com/lecture/math/linear-algebra/複素内積とユニタリ行列-講義/

→ 講義 **直交化の基本** lecture math linear-algebra
https://study.bem130.com/lecture/math/linear-algebra/直交化の基本-講義/

→ 講義 **直交補空間と射影** lecture math linear-algebra
https://study.bem130.com/lecture/math/linear-algebra/直交補空間と射影-講義/