

列ベクトルの独立性と階数への橋渡し

column vector

rank

1 導入

この講義で重要なのは、列ベクトルの一次独立性は、行列の pivot と階数へ直結することである。階数を非零成分の個数と誤解すると、行列が保持する情報を把握できない。列ベクトルの独立な方向の本数が階数である。

2 用語と定義

ベクトル v_1, \dots, v_k が一次独立であるとは、

$$c_1v_1 + \dots + c_kv_k = 0$$

から

$$c_1 = \dots = c_k = 0$$

が従うことである。

階数は、独立な列ベクトルの最大本数である。

3 方針

列ベクトルを並べて行列を作り、掃き出しで pivot 列を確認する。pivot 列に対応する元の列ベクトルが、列空間の基底を与える。

→ 講義 行ベクトルと列ベクトル [lecture](https://study.bem130.com/lecture/math/vector/行ベクトルと列ベクトル-講義/) [math](#) [vector](#)
<https://study.bem130.com/lecture/math/vector/行ベクトルと列ベクトル-講義/>

→ 講義 階段形と簡約階段形 [lecture](https://study.bem130.com/lecture/math/linear-algebra/階段形と簡約階段形-講義/) [math](#) [linear-algebra](#)
<https://study.bem130.com/lecture/math/linear-algebra/階段形と簡約階段形-講義/>

4 直感的な説明

2本の列ベクトルが同じ方向を向いていれば、一方は他方の定数倍であり、新しい方向を追加しない。階数は、このような重複を除いた本質的な方向の数である。

5 厳密な説明

a_1, \dots, a_n を行列 A の列ベクトルとする。一次関係

$$c_1a_1 + \dots + c_na_n = 0$$

は

$$Ac = 0$$

どち equivalent と同値である。したがって、列ベクトルの一次独立性は同次方程式 $Ac = 0$ の解を調査することで判定できる。

ぎょうきほんへんけい elementary row operation 行基本変形をしても、この同次方程式の解集合は変わらない。実際、行基本変形は左から可逆行列 E を掛ける操作なので、 $EAc = 0$ なら $Ac = E^{-1}0 = 0$ であり、逆も成り立つ。

operat 操作 ぞん column 保存されるのは、列 どうしの一次関係である。一方、行基本変形は列ベクトルそのものを Ea_i に移すため、列空間そのものは一般には変わる。だから階段形で見つけた pivot 列は、「変形後の列 そのもの」ではなく、「元の行列の同じ位置の列」へ戻して読む必要がある。

6 具体例

$$a_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad a_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad a_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

とする。ここで

$$a_3 = a_1 + a_2$$

であるため、3 本は一次従属である。独立な方向は a_1, a_2 の 2 本で十分であり、階数は 2 である。

7 よくある誤解

- 階数は非零成分の個数ではない。独立な列の本数である。
- 掃き出し後の列そのものが元の列空間を表すとは限らない。pivot 列の位置を元の行列へ戻して確認する。
- 列が多いほど階数が大きいとは限らない。従属な列は新しい方向を追加しない。

8 どこまで成り立つか

列ベクトルの独立性は有限次元の階数の基礎である。抽象ベクトル空間では列として並べるとは限らないが、線型結合による一次独立の定義はそのまま成立する。

9 最終形

$$c_1 a_1 + \dots + c_n a_n = 0 \iff Ac = 0$$

$$\text{rank}(A) = \text{独立な列の最大本数}$$

10 えんしゅう 演習リンク

→ 基本演習 ベクトル空間・基底・階数 exercise math linear-algebra
<https://study.bem130.com/exercise/math/linear-algebra/ベクトル空間・基底・階数-基本演習/>

11 かんれん 関連リンク

→ 講義 階数の基本 lecture math linear-algebra
<https://study.bem130.com/lecture/math/linear-algebra/階数の基本-講義/>

→ 講義 ベクトル空間と基底 lecture math linear-algebra
<https://study.bem130.com/lecture/math/linear-algebra/ベクトル空間と基底-講義/>

→ 講義 行ベクトルと列ベクトル lecture math vector
<https://study.bem130.com/lecture/math/vector/行ベクトルと列ベクトル-講義/>