

# 固有値と固有ベクトル

eigenvalue      eigenvector

## 1 導入

この講義の核心は、固有値・固有ベクトルとは「線型変換の中で向きが変わらない方向 (固有ベクトル) とその伸縮率 (固有値)」であり、変換の本質的な構造をもっとも単純な基底で表すという観点である。「特性方程式を解く技術」として扱うと、「なぜ  $\det(A - \lambda I) = 0$  なのか」「代数的重複度と幾何的重複度の違いとは何か」が不明瞭になる。変換が「向きを変えない方向」を持つ条件から出発すると、すべてが自然に導かれる。

## 2 用語と定義

### 2.1 固有値と固有ベクトル

Eigenvalue      Eigenvector

$A$  を  $n$  次正方行列とすると、 $v \neq 0$  かつ

$$Av = \lambda v$$

を満たすスカラー  $\lambda$  を固有値、 $v$  を対応する固有ベクトルという。

### 2.2 特性多項式

Characteristic polynomial

$$p(\lambda) = \det(A - \lambda I)$$

を  $A$  の特性多項式という。 $n$  次多項式であり、固有値は  $p(\lambda) = 0$  の解である。

## 3 方針

- $Av = \lambda v$  を  $\det(A - \lambda I) = 0$  へ翻訳する論理を確認する
- 代数的重複度と幾何的重複度の差が対角化可能性を決める
- Cayley-Hamilton の定理と微分方程式への接続を確認する

→ 講義 線型写像と行列 [lecture](#) [math](#) [linear-algebra](#)  
<https://study.bem130.com/lecture/math/linear-algebra/線型写像と行列-講義/>

## 4 直感的な説明

一般の線型変換は、ベクトルの向きを変える。たとえば平面を斜めに押し潰したり、回転させたりすると、ほとんどの矢印は別の方向を向く。その中で、変換後も同じ直線上に残る方向があるなら、その方向が固有ベクトルの方向である。変換はその方向では、回転やせん断ではなく、ただの伸縮として見える。その伸縮率が固有値である。

つまり固有値・固有ベクトルは、複雑な線型変換を「方向ごとの倍率」として読める場所を探す道具である。  
この見方が対角化へ接続する。

→ 講義 対角化の基本 lecture math linear-algebra  
https://study.bem130.com/lecture/math/linear-algebra/対角化の基本-講義/

## 5 厳密な説明

### 5.1 1. 方程式への翻訳

固有ベクトルの定義は、非零ベクトル  $v \neq 0$  を含めて

$$Av = \lambda v \quad (v \neq 0)$$

である。これは

$$(A - \lambda I)v = 0 \quad (v \neq 0)$$

と同値である。ここまでは固有値の定義を移項しただけであり、まだ行列式は登場していない。  
次に、同次方程式  $(A - \lambda I)x = 0$  が非自明解を持つ条件を用いる。 $A - \lambda I$  が可逆なら解は  $x = 0$  のみであるため、非自明解が存在することは

$$\det(A - \lambda I) = 0$$

と同値である。つまり、定義と特性方程式は次の2段階で接続される。

$$Av = \lambda v \quad (v \neq 0) \iff (A - \lambda I)v = 0 \quad (v \neq 0)$$

$$(A - \lambda I)x = 0 \text{ が非自明解を持つ} \iff \det(A - \lambda I) = 0$$

### 5.2 2. 特性多項式の性質

$n \times n$  行列  $A$  の特性多項式は  $n$  次であり：

$$\det(A - \lambda I) = (-1)^n \lambda^n + (-1)^{n-1} (\text{tr } A) \lambda^{n-1} + \dots + \det A$$

重要な関係：

$$\text{tr } A = \sum_{i=1}^n \lambda_i, \quad \det A = \prod_{i=1}^n \lambda_i$$

$(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$  は重複を込みにした固有値全体

ここでいう固有値全体とは、特性多項式が考えている体の上で一次式に分解する場合の根を、代数的重複度を込めて数えたものである。実行列でも実数の範囲で固有値が足りないことがあるため、必要に応じて複素数体まで拡張して読む。

応用： $\det A = 0 \iff 0$  が固有値 ( $A$  が特異行列)。

### 5.3 3. 重複度の二種類

代数的重複度 (AM) : 固有値  $\lambda_0$  が特性多項式の根として現れる回数。

幾何的重複度 (GM) : 固有空間

$$E_{\lambda_0} = \ker(A - \lambda_0 I)$$

次元である。A が  $n \times n$  行列なら、階数・退化次数定理により

$$GM(\lambda_0) = \dim \ker(A - \lambda_0 I) = n - \text{rank}(A - \lambda_0 I)$$

である。

固有値  $\lambda_0$  について、常に

$$1 \leq GM(\lambda_0) \leq AM(\lambda_0)$$

である。また、特性多項式が対象の体の上で一次式に分解している場合、すべての固有値について幾何的重複度と代数的重複度が一致することは、対角化可能性と同値である。

$$\forall \lambda \in \text{Spec}(A), \quad GM(\lambda) = AM(\lambda) \iff A \text{ is diagonalizable}$$

例 (対角化不可能な場合) :  $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$  は  $\lambda = 1$  ( $AM = 2$ ) だが  $GM = 1$ 。

## 5.4 4. 具体例

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

特性多項式 :  $\det(A - \lambda I) = (3 - \lambda)(2 - \lambda) = 0$  より  $\lambda = 2, 3$ 。

$\lambda = 3$  に対して  $(A - 3I)v = 0 \rightarrow v \propto \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\lambda = 2$  に対して  $(A - 2I)v = 0 \rightarrow v \propto \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

## 5.5 5. Cayley-Hamilton の定理

行列 A は自分自身の特性多項式を満たす :

特性多項式を  $q(t) = \det(tI - A)$  と置くと、

$$q(A) = 0$$

である。ここで 0 は零行列を表す。記号として  $p(\lambda) = \det(A - \lambda I)$  を用いる流儀では最高次係数の符号が

変わるが、Cayley-Hamilton の内容は「行列が自分自身の特性多項式を満たす」という命題である。

例 :  $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$  の特性多項式は  $\lambda^2 - (a + d)\lambda + (ad - bc)$ 。Cayley-Hamilton より  $A^2 - (a + d)A + (ad -$

$bc)I = 0$ 。

応用 :  $A^{-1}$  を特性多項式で表現する ( $\det A \neq 0$  のとき)。

## 5.6 6. 連立微分方程式への応用

$x' = Ax$  の解は  $x(t) = e^{At}x(0)$ 。A が対角化可能で  $A = PDP^{-1}$  なら :

$$e^{At} = Pe^{Dt}P^{-1}, \quad e^{Dt} = \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t} & & \\ & \ddots & \\ & & e^{\lambda_n t} \end{pmatrix}$$

固有値の実部が安定性を決める (負  $\rightarrow$  安定、正  $\rightarrow$  不安定)。

## 6 判定基準

- $Av = \lambda v \rightarrow$  特性多項式  $\det(A - \lambda I) = 0$  を解く
- 対角化可能か  $\rightarrow$  固有値がすべて異なる  $\rightarrow$  可 (十分条件)
- $\text{tr } A$  と  $\det A$  を素早く  $\rightarrow$  固有値の和・積で検算
- 微分方程式  $x' = Ax$  の安定性  $\rightarrow$  固有値の実部の符号

## 7 どこまで成り立つか

実数行列においても固有値は複素数になりうる (回転行列の  $\lambda = e^{\pm i\theta}$ )。対角化の問題はスペクトル定理 (対称行列は直交対角化可能) やジョルダン標準形 (一般の場合) へ拡張される。スペクトル定理は対称行列に限らず正規行列まで拡張でき、作用素理論では微分作用素の固有関数 ( $e^{\lambda x}$ ) が同じ発想の無限次元への拡張である。

## 8 最終形

$$Av = \lambda v (v \neq 0) \iff (A - \lambda I)v = 0 (v \neq 0)$$

$$(A - \lambda I)x = 0 \text{ が非自明解を持つ} \iff \det(A - \lambda I) = 0$$

$$\text{tr } A = \sum \lambda_i, \quad \det A = \prod \lambda_i$$

$$p(A) = 0 \quad (\text{Cayley-Hamilton})$$

$$GM(\lambda) = \dim \ker(A - \lambda I), \quad 1 \leq GM(\lambda) \leq AM(\lambda)$$

## 9 一言でいうと

固有値は変換の「向きを変えない方向での倍率」であり、特性多項式はその情報を  $n$  次多項式に圧縮する。Cayley-Hamilton の定理は行列が自分自身の特性多項式を満たすという対称性を示し、対角化は固有ベクトルの「向きが変わらない軸」を基底にした変換のもっとも単純な記述である。

## 10 演習リンク

[→ 基本演習 固有値・対角化・発展](https://study.bem130.com/exercise/math/linear-algebra/) [exercise](#) [math](#) [linear-algebra](#)

## 11 かんれん 関連リンク

→ 講義 **ベクトル空間と基底** lecture math linear-algebra  
<https://study.bem130.com/lecture/math/linear-algebra/ベクトル空間と基底-講義/>

→ 講義 **線型写像と行列** lecture math linear-algebra  
<https://study.bem130.com/lecture/math/linear-algebra/線型写像と行列-講義/>

→ 講義 **行列式** lecture math linear-algebra  
<https://study.bem130.com/lecture/math/linear-algebra/行列式-講義/>

→ 講義 **対角化の基本** lecture math linear-algebra  
<https://study.bem130.com/lecture/math/linear-algebra/対角化の基本-講義/>