対称行列と直交対角化

symmetric matrix

1 導入

この講義で重要なのは、**対称行列は、固有値だけでなく固有ベクトルの直交性まで保証する特別な行列であるということである。**

一般の行列は、対角化できるとは限らない。対角化できる場合であっても、基底を構成する固有ベクトルが互いに直交するとは限らない。これに対して、実対称行列は正規直交基底によって対角化できる。この事実が有限次元のスペクトル定理である。

2 用語と定義

対称行列とは、実正方行列 A が

$$A^T = A$$

を満たす行列である。

エルミート行列とは、複素正方行列 A が

$$A^* = A$$

を満たす行列である。ただし A^* は共役転置である。

ユニタリ行列とは、複素正方行列 U が

$$U^*U = UU^* = I$$

を満たす行列である。これは複素内積、長さ、直交を保存する行列である。

正規行列とは、複素正方行列 A が

$$A^*A = AA^*$$

を満たす行列である。エルミート行列とユニタリ行列は正規行列の代表例である。

直交対角化とは、実行列 A を直交行列 Q と対角行列 D によって

$$A = QDQ^T$$

と表示することである。複素の場合は、ユニタリ行列 U により

$$A = UDU^*$$

と表示する。

3 方針

方針は二段階である。まず、対称性が内積の中で

$$\langle Au, v\rangle = \langle u, Av\rangle$$

を意味することを確認する。つぎに、この関係から、異なる固有値に対応する固有ベクトルが直交することを導出する。

→ 講義 内積空間の基本 lecture math linear-algebra
https://study.bem130.com/lecture/math/linear-algebra/内積空間の基本-講義/

→ 講義 複素内積とユニタリ行列 lecture math linear-algebra
https://study.bem130.com/lecture/math/linear-algebra/複素内積とユニタリ行列-講義/

4 直感的な説明

対称行列 は、 入力方向 と 出力方向 の寄与を 内積 で測定したとき、左右を交換しても 値 が変化しない行列である。

この対称性は、空間の歪みを生成する変換ではなく、互いに 直交 する主方向ごとの 伸縮 として分解できることを示唆する。主方向が固有ベクトル、伸縮率が固有値である。

5 厳密な説明

5.1 1. 異なる固有値の固有ベクトルは直交する

A を 実対称行列 とし、$Au = \lambda u$、$Av = \mu v$、$\lambda \neq \mu$ とする。 内積 の対称性から

$$\langle Au, v\rangle = \langle u, Av\rangle$$

である。 左辺 と 右辺 を固有値で表現すると

$$\lambda\langle u, v\rangle = \mu\langle u, v\rangle$$

である。したがって

$$(\lambda - \mu)\langle u, v\rangle = 0$$

であり、$\lambda \neq \mu$ であるため $\langle u, v\rangle = 0$ である。よって u と v は直交する。

複素のエルミート行列でも同じ議論が成立する。$A^* = A$ は自己随伴性であり、 内積 の中で A を左右に移動しても

$$\langle Au, v\rangle = \langle u, Av\rangle$$

が成立する。したがって固有値が異なれば固有ベクトルは直交する。また $Au = \lambda u$ のとき

$$\lambda\langle u, u\rangle = \langle Au, u\rangle = \langle u, Au\rangle = \overline{\lambda}\langle u, u\rangle$$

である。$u \neq 0$ なら $\langle u, u\rangle > 0$ なので、$\lambda = \overline{\lambda}$ となり、固有値は実数である。

5.2 2. 実対称行列 のスペクトル定理

有限次元の実内積空間で、 実対称行列 A について次が成立する。

$$\boxed{A = QDQ^T}$$

ここで Q は 直交行列 、D は実固有値を並べた対角行列である。Q の 列 は A の正規直交固有ベクトルである。

複素の場合は、エルミート行列 A について

$$\boxed{A = UDU^*}$$

が成立する。ここで U はユニタリ行列であり、D の対角成分は実数である。

5.3 3. 正規行列との関係

複素の有限次元内積空間では、正規行列はユニタリに対角化できる。すなわち

$$A^*A = AA^* \iff A = UDU^*$$

である。エルミート行列は正規行列のうち、固有値が実数になる特別な場合である。実対称行列は、その実数版として位置づけられる。

この整理により、一般の対角化可能行列、正規行列、エルミート行列、実対称行列の差異が明確になる。直交またはユニタリな基底で対角化できることは、内積構造と両立することを意味する。

6 具体例

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

は対称行列である。固有ベクトルとして

$$q_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad q_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

を採用すると、対応する固有値は $3, 1$ である。したがって

$$Q = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \qquad D = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

により

$$A = QDQ^T$$

と直交対角化される。

7 別の観点

通常の対角化は、適切な基底を選択して行列を単純化する操作である。直交対角化は、さらにその基底を正規直交基底にできるという強い主張である。

この差異は計算上も幾何学上も重要である。直交行列は長さと角度を保存するため、座標変換によって内積構造が破壊されない。

8 判定基準

- 実対称行列なら、直交対角化できる。
- エルミート行列なら、ユニタリ対角化できる。
- 複素では、ユニタリ対角化できる行列は正規行列である。

- 異なる固有値に対応する固有ベクトルは直交する。
- 固有値は、主方向ごとの伸縮率として解釈できる。

9 どこまで成り立つか

直交対角化は任意の対角化可能行列に成立するわけではない。直交対角化には、内積と両立する対称性が必要である。複素では対称行列ではなくエルミート行列を基本対象にする。

10 最終形

$$\boxed{A^T = A \implies A = QDQ^T}$$

$$\boxed{A^* = A \implies A = UDU^*}$$

$$\boxed{A^*A = AA^* \iff A \text{ is unitarily diagonalizable}}$$

$$\boxed{\lambda \neq \mu \Rightarrow E_\lambda \perp E_\mu}$$

11 一言でいうと

- 対称行列は、空間を直交する固有方向ごとの伸縮へ分解できる行列である。

12 演習リンク

→ 基本演習 **固有値・対角化・発展** exercise math linear-algebra
https://study.bem130.com/exercise/math/linear-algebra/固有値・対角化・発展-基本演習/

→ 基本演習 **複素内積とユニタリ行列** exercise math linear-algebra
https://study.bem130.com/exercise/math/linear-algebra/複素内積とユニタリ行列-基本演習/

13 関連リンク

→ 講義 **内積空間の基本** lecture math linear-algebra
https://study.bem130.com/lecture/math/linear-algebra/内積空間の基本-講義/

→ 講義 **複素内積とユニタリ行列** lecture math linear-algebra
https://study.bem130.com/lecture/math/linear-algebra/複素内積とユニタリ行列-講義/

→ 講義 **固有値と固有ベクトル** lecture math linear-algebra
https://study.bem130.com/lecture/math/linear-algebra/固有値と固有ベクトル-講義/

→ 講義 **対角化の基本** lecture math linear-algebra
https://study.bem130.com/lecture/math/linear-algebra/対角化の基本-講義/

→ 講義 **二次形式と正定値行列** lecture math linear-algebra
https://study.bem130.com/lecture/math/linear-algebra/二次形式と正定値行列-講義/