対角化の基本

diagonalization

1 導入

この講義で最重要なのは、**対角化は行列をただ変形する技術ではなく、固有ベクトルを基底に選択し直して線型変換の本質を明示すること**である。

対角行列は、各座標方向に倍率を掛けるだけの単純な変換である。したがって複雑な行列であっても、適切な基底を採用すると対角行列になるなら、その変換の構造は理解しやすくなる。

2 用語と定義

対角化可能 とは、ある正則行列 P を用いて

$$P^{-1}AP = D$$

と表示でき、D が対角行列になることである。

この式で保存されるのは、線型写像そのものの作用である。変わるのは、その作用を読むための座標表示である。A は標準基底での表示、D は固有基底での表示であり、P は固有基底の座標から 標準座標 へ戻す行列である。

固有基底 とは、固有ベクトルだけからなる基底である。

3 方針

まず、固有ベクトルが基底を構成できると行列が対角行列になることを確認する。対角化は基底変更の応用であり、同じ線型写像を固有基底で表示し直す操作である。そのあと、対角化できるための条件を幾何的重複度と代数的重複度で整理し、冪・漸化式・微分方程式への応用へ接続する。

→ 講義 固有値と固有ベクトル lecture math linear-algebra
https://study.bem130.com/lecture/math/linear-algebra/固有値と固有ベクトル-講義/

→ 講義 線型写像と行列 lecture math linear-algebra
https://study.bem130.com/lecture/math/linear-algebra/線型写像と行列-講義/

4 直感的な説明

標準的な座標系では変換の構造が複雑であっても、その変換が自然に伸縮させる方向へ座標軸を調整すれば、変換は単純に記述できる。この「座標軸を固有方向に合わせる」ことが対角化である。

5 厳密な説明

5.1 1. 固有ベクトルを並べる

一次独立な固有ベクトル $v_1, \ldots, v_n$ があり、それぞれの固有値を $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ とする。

このとき

$$P = (v_1 \ \cdots \ v_n), \qquad D = \operatorname{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$$

とおけば

$$AP = PD$$

である。なぜなら、P の第 j 列は v_j で、AP の第 j 列は $Av_j = \lambda_j v_j$、また PD の第 j 列も $\lambda_j v_j$ となるためである。したがって P が正則なら

$$P^{-1}AP = D$$

となる。

たとえば

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

では、$\lambda = 3$ の固有ベクトルとして $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$、$\lambda = 2$ の固有ベクトルとして $v_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ を取れる。したがって

$$P = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad D = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

と置くと、

$$P^{-1}AP = D$$

である。この具体例で変わっているのは座標軸であり、線型変換そのものではない。固有方向を座標軸に選ぶと、変換は「第 1 軸を 3 倍、第 2 軸を 2 倍」という対角行列として読める。

5.2 2. 対角化の条件

行列 A が対角化可能であるためには、空間の次元だけ一次独立な固有ベクトルを確保できることが必要である。

固有値がすべて異なれば、その固有ベクトルは自動的に一次独立なので、対角化できる。

より本質的には、

$$A \text{ が対角化可能} \iff V \text{ が固有基底をもつ}$$

である。特性多項式が対象の体の上で一次式に分解するとき、各固有値 λ について

$$\mathrm{GM}(\lambda) = \mathrm{AM}(\lambda)$$

が全て成立することと、A が対角化可能であることは同値である。固有値が全て異なることは十分条件であり、必要条件ではない。

5.3 3. 対角化の利点

対角化できると

$$A^n = PD^nP^{-1}$$

となり、行列の冪や反復が扱いやすくなる。D^n は対角成分を各自 n 乗するだけで済むためである。さらに、連立微分方程式

$$x'(t) = Ax(t)$$

では

$$x(t) = e^{tA}x(0)$$

を考察する。$A = PDP^{-1}$ なら

$$e^{tA} = Pe^{tD}P^{-1}$$

となり、e^{tD} は対角成分 $e^{t\lambda_i}$ を並べるだけで計算できる。したがって対角化は、高い冪だけでなく連立微分方程式の解析にも有効である。

6 判定基準

- 固有値と固有ベクトルを求めたあと、「対角化できるか」と問われたら、一次独立な固有ベクトルが十分に存在するかを確認する。
- 行列の高い冪や漸化式が出現したら、対角化の適用を検討する。
- 固有値がすべて異なるなら、対角化可能である。ただし重複がある場合においても、GM = AM が成立すれば対角化可能である。

7 どこまで成り立つか

固有値が求まっても、固有ベクトルが十分に確保できなければ対角化はできない。たとえば

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

は固有値 1 を持つが、一次独立な固有ベクトルが 1 本しか確保できないので対角化できない。つまり「固有値がある」ことと「対角化できる」ことは別である。

8 最終形

$$\boxed{P^{-1}AP = D}$$

$$\boxed{A \text{ が対角化可能} \iff A \text{ は固有基底をもつ}}$$

$$\boxed{\mathrm{GM}(\lambda) = \mathrm{AM}(\lambda) \text{ for all } \lambda}$$

$$\boxed{A^n = PD^nP^{-1}}$$

$$\boxed{e^{tA} = Pe^{tD}P^{-1}}$$

9 一言(ひとこと)でいうと

- 対角化(たいかくか / diagonalization)は、固有(こゆう)ベクトル(eigenvector)を基底(きてい / basis)に選択(せんたく)し直(なお)して、線型変換(せんけいへんかん / linear transformation)を「方向(ほうこう)ごとの倍率(ばいりつ)」として再記述(さいきじゅつ)することである。

10 演習(えんしゅう)リンク

→ 基本演習 **固有値・対角化・発展** exercise math linear-algebra
https://study.bem130.com/exercise/math/linear-algebra/固有値・対角化・発展-基本演習/

11 関連(かんれん)リンク

→ 講義 **固有値と固有ベクトル** lecture math linear-algebra
https://study.bem130.com/lecture/math/linear-algebra/固有値と固有ベクトル-講義/

→ 講義 **対称行列と直交対角化** lecture math linear-algebra
https://study.bem130.com/lecture/math/linear-algebra/対称行列と直交対角化-講義/

→ 講義 **最小多項式の基本** lecture math linear-algebra
https://study.bem130.com/lecture/math/linear-algebra/最小多項式の基本-講義/

→ 講義 **ジョルダン標準形の入口** lecture math linear-algebra
https://study.bem130.com/lecture/math/linear-algebra/ジョルダン標準形の入口-講義/