

# 最小多項式の基本

minimal polynomial

## 1 導入

この講義で重要なのは、最小多項式は、行列が満たす代数的関係を最小限に記録する多項式であるという

ことである。固有値は行列の情報を要約するが、それだけでは対角化可能性を完全には判定できない。最小多項式を導入すると、同じ固有値を持つ行列の差異を、重根の有無として確認できる。

## 2 用語と定義

最小多項式とは、正方行列  $A$  に対して

$$m_A(A) = 0$$

を満たす零でない多項式のうち、次数が最小で、最高次係数が1であるものをいう。

特性多項式を

$$\chi_A(t) = \det(tI - A)$$

とする。ケーリー・ハミルトンの定理により

$$\chi_A(A) = 0$$

である。したがって最小多項式は存在し、特性多項式を割る。

## 3 方針

方針は、行列に多項式を代入する操作を確認し、最小多項式の根と固有値の関係を整理することである。

→ [講義](#) [固有値と固有ベクトル](#) [lecture](#) [math](#) [linear-algebra](#)  
<https://study.bem130.com/lecture/math/linear-algebra/固有値と固有ベクトル-講義/>

## 4 直感的な説明

数  $\lambda$  について  $(t - \lambda)$  が消去するのは、 $t = \lambda$  という条件である。行列  $A$  について  $(A - \lambda I)$  が零になるわけではない。しかし、適切な多項式を組み合わせると、行列全体を零行列にできる。

最小多項式は、そのために必要な最短の式である。対角化可能な行列では、固有値ごとに1回ずつ因子を用意すれば十分である。対角化できない場合は、同じ因子が複数回必要になる。

## 5 厳密な説明

### 5.1 1. 特性多項式との関係

最小多項式  $m_A(t)$  は特性多項式  $\chi_A(t)$  を割る。

$$m_A(t) \mid \chi_A(t)$$

したがって  $m_A(t)$  の根は  $A$  の固有値であり、固有値は  $m_A(t)$  の根として出現する。

### 5.2 2. 対角化可能性との関係

体  $K$  上で  $A$  の最小多項式が

$$m_A(t) = \prod_{i=1}^r (t - \lambda_i)$$

のように相異なる一次因子の積に分解されるなら、 $A$  は対角化可能である。逆も成立する。

$A$  が対角化可能  $\iff m_A(t)$  が重根をもたない一次因子の積

この判定は、固有値の種類だけでなく、最小多項式に重複が必要かどうかを確認する方法である。

## 6 具体例

### 6.1 1. 対角行列

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

では

$$(A - 2I)(A - 3I) = 0$$

である。したがって

$$m_A(t) = (t - 2)(t - 3)$$

である。

### 6.2 2. ジョルダンブロック

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

とする。このとき

$$B - I = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

は零行列ではないが、

$$(B - I)^2 = 0$$

である。したがって

$$m_B(t) = (t - 1)^2$$

である。重根が現れるため、 $B$  は対角化可能ではない。

## 7 別の観点

最小多項式は、線型変換が生成する代数の関係式である。たとえば  $A^k$  を計算するとき、最小多項式が分かれば高次の冪を低次の冪へ還元できる。

## 8 判定基準

- 最小多項式は、 $m_A(A) = 0$  を満たす最小次数のモニック多項式である。
- 最小多項式は特性多項式を割る。
- 対角化可能性は、最小多項式が重根を持たないことと対応する。
- ジョルダン標準形では、最大のブロックサイズが最小多項式の指数に反映される。

## 9 どこまで成り立つか

一次因子への分解を用いる主張は、考察する体の上で多項式が分解することを前提にする。実数だけでは分解しない場合も、複素数へ拡張すると分解できることがある。

## 10 最終形

$$m_A(A) = 0$$

$$m_A(t) \mid \chi_A(t)$$

$$A \text{ diagonalizable} \iff m_A(t) \text{ has no repeated root}$$

## 11 一言でいうと

- 最小多項式は、行列を零化する最短の関係式であり、対角化可能性を判定する道具である。

## 12 演習リンク

→ [基本演習](#) [固有値・対角化・発展](#) [exercise](#) [math](#) [linear-algebra](#)  
<https://study.bem130.com/exercise/math/linear-algebra/固有値・対角化・発展-基本演習/>

## 13 かんれん 関連リンク

→ 講義 固有値と固有ベクトル lecture math linear-algebra  
<https://study.bem130.com/lecture/math/linear-algebra/固有値と固有ベクトル-講義/>

→ 講義 対角化の基本 lecture math linear-algebra  
<https://study.bem130.com/lecture/math/linear-algebra/対角化の基本-講義/>

→ 講義 ジョルダン標準形の入口 lecture math linear-algebra  
<https://study.bem130.com/lecture/math/linear-algebra/ジョルダン標準形の入口-講義/>