直交補空間と射影

1 導入

この講義で重要なのは、**部分空間に沿う成分と、それに直交する成分へベクトルを一意に分解する**という発想である。

射影や最小二乗法では、「列空間に最も近いベクトル」を求める。近さを記述するには、誤差が列空間に直交する、という条件が中心になる。この条件を整理する道具が直交補空間である。

2 用語と定義

直交補空間とは、内積空間 V の部分空間 U に対して

$$U^{\perp} = \{v \in V \mid \langle v, u \rangle = 0 \text{ for all } u \in U\}$$

で定義される部分空間である。

直交射影とは、ベクトル v を U 方向の成分 p と $U^{\perp}$ 方向の成分 r に

$$v = p + r, \qquad p \in U, \quad r \in U^{\perp}$$

と分解したときの p である。

3 方針

まず $U^{\perp}$ が部分空間であることを確認する。つぎに、有限次元内積空間では $V = U \oplus U^{\perp}$ が成立することを説明し、直交射影の公式へ移行する。

→ 講義 内積空間の基本 lecture math linear-algebra
https://study.bem130.com/lecture/math/linear-algebra/内積空間の基本-講義/

→ 講義 複素内積とユニタリ行列 lecture math linear-algebra
https://study.bem130.com/lecture/math/linear-algebra/複素内積とユニタリ行列-講義/

4 直感的な説明

平面の中に 1 本の直線 U があるとする。あるベクトル v は、その直線に沿う影 p と、直線に垂直な残り r に分解できる。この r が属する方向の全体が $U^{\perp}$ である。

この分解が重要なのは、p が U の中で v に最も近いベクトルになるためである。誤差 $v - p$ が U に直交していると、U の中でさらに近づく方向が残っていない。

5 厳密な説明

5.1 1. $U^\perp$ は部分空間である

$v, w \in U^\perp$、スカラー a, b を任意に固定する。任意の $u \in U$ について

$$\langle av + bw, u\rangle = a\langle v, u\rangle + b\langle w, u\rangle = 0$$

である。したがって $av + bw \in U^\perp$ であり、$U^\perp$ は部分空間である。

5.2 2. 直交分解

有限次元内積空間で U が部分空間なら、任意の $v \in V$ は

$$v = p + r, \qquad p \in U, \quad r \in U^\perp$$

と一意に分解できる。この事実を直交分解という。

存在は、U の正規直交基底から構成できる。U の正規直交基底を $e_1, \ldots, e_k$ とし、

$$p = \sum_{i=1}^{k} \langle v, e_i\rangle e_i$$

と置く。この p は U のベクトルである。さらに各 j について

$$\langle v - p, e_j\rangle = \langle v, e_j\rangle - \sum_{i=1}^{k} \langle v, e_i\rangle\langle e_i, e_j\rangle = 0$$

である。正規直交基底では $\langle e_i, e_j\rangle = 0$（$i \neq j$）かつ $\langle e_j, e_j\rangle = 1$ だからである。$v - p$ は U の基底すべてに直交するので、$v - p \in U^\perp$ である。したがって $v = p + (v - p)$ という分解が存在する。

一意性は直交性から従う。もし

$$v = p_1 + r_1 = p_2 + r_2$$

であれば、$p_1 - p_2 = r_2 - r_1$ である。左辺は U に属し、右辺は $U^\perp$ に属する。したがってこのベクトルは $U \cap U^\perp$ に属する。ところが $x \in U \cap U^\perp$ なら $\langle x, x\rangle = 0$ なので $x = 0$ である。よって $p_1 = p_2$、$r_1 = r_2$ となる。

直交分解から、有限次元では

$$\dim U + \dim U^\perp = \dim V$$

が従う。また $U \subset (U^\perp)^\perp$ であり、両辺の次元が一致するため

$$(U^\perp)^\perp = U$$

である。これらは直交補空間が単なる垂直方向の集合ではなく、部分空間の次元を補完する構造であることを示す。

5.3 3. 正規直交基底による射影公式

U の正規直交基底を $e_1, \ldots, e_k$ とする。このとき v の U への直交射影は

$$\mathrm{proj}_U(v) = \sum_{i=1}^{k} \langle v, e_i \rangle e_i$$

である。理由は、$p = \sum_i \langle v, e_i \rangle e_i$ と置くと、各 j について

$$\langle v - p, e_j \rangle = 0$$

が成立し、$v - p \in U^\perp$ となるためである。

複素内積空間でも同じ公式を使う。ただし、この系列では第 1 変数を線型とするため、係数は $\langle v, e_i \rangle$ である。別の規約では共役の位置が変わる。

射影行列として見ると、直交射影は

$$P^2 = P, \qquad P^* = P$$

を満たす。$P^2 = P$ は「一度射影したら再度射影しても変わらない」こと、$P^* = P$ は内積と両立した直交な射影であることを表す。

6 具体例

$\mathbb{R}^2$ で $U = \mathrm{span}\{(1,1)\}$ とする。単位ベクトル $e = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,1)$ を用いると、$v = (2,0)$ の射影は

$$\mathrm{proj}_U(v) = \langle v, e \rangle e = \sqrt{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}(1,1) = (1,1)$$

である。残差は

$$v - \mathrm{proj}_U(v) = (1, -1)$$

であり、これは $(1,1)$ と直交する。

7 別の観点

幾何的には、直交補空間は「部分空間に垂直な方向の集まり」である。代数的には、$U^\perp$ は内積による条件式 $\langle v, u \rangle = 0$ の解空間である。

8 判定基準

- 射影、最短距離、残差が登場したら、直交補空間を確認する。
- 部分空間の外にあるベクトルを、内部の成分と垂直な誤差に分解したいとき、直交分解を用いる。
- 最小二乗法では、残差が列空間の直交補空間に属することを利用する。

9 どこまで成り立つか

有限次元内積空間では、直交分解は安定して成立する。無限次元では、部分空間が閉じているかどうかが重要になる。閉じていない部分空間では、最近点や射影が存在しない場合がある。

複素の場合は、転置ではなく共役転置 A^* が射影や最小二乗法の式に現れる。

10 最終形

$$\boxed{U^\perp = \{v \in V \mid \langle v, u \rangle = 0 \text{ for all } u \in U\}}$$

$$\boxed{V = U \oplus U^\perp}$$

$$\boxed{\dim U + \dim U^\perp = \dim V, \qquad (U^\perp)^\perp = U}$$

$$\boxed{\mathrm{proj}_U(v) = \sum_{i=1}^{k} \langle v, e_i \rangle e_i}$$

11 一言でいうと

- 直交補空間(orthogonal complement)は、部分空間(subspace)に垂直な誤差を収容する空間である。

12 演習リンク

→ 基本演習 **内積・直交・射影** exercise math linear-algebra
https://study.bem130.com/exercise/math/linear-algebra/内積・直交・射影-基本演習/

13 関連リンク

→ 講義 **内積空間の基本** lecture math linear-algebra
https://study.bem130.com/lecture/math/linear-algebra/内積空間の基本-講義/

→ 講義 **複素内積とユニタリ行列** lecture math linear-algebra
https://study.bem130.com/lecture/math/linear-algebra/複素内積とユニタリ行列-講義/

→ 講義 **直交化の基本** lecture math linear-algebra
https://study.bem130.com/lecture/math/linear-algebra/直交化の基本-講義/

→ 講義 **最小二乗法の基本** lecture math linear-algebra
https://study.bem130.com/lecture/math/linear-algebra/最小二乗法の基本-講義/