

# 線型代数ポータル

linear algebra

## 1 導入

このノートは、線型代数の講義を、まず「線型性とは何か」「行列の列は何を記録しているか」から整理し、その後で連立一次方程式、階数、内積、固有値へ接続するための入口である。

## 2 学習の全体像

線型代数は、計算手順だけの集合ではない。中心にあるのは、ベクトルの和とスカラー倍を保つ線型写像である。線型性があるから、基底ベクトルの像だけで空間全体の行き先が決まる。そして、その基底ベクトルの像を列として並べたものが行列である。この見方を先に持つと、行列積は写像の合成になり、階数は像の次元になり、核は零へ潰れる入力方向になる。内積を追加すると長さ・角度・射影が導入され、固有値と対角化は、線型写像を方向ごとの倍率として読み直す道具になる。

## 3 前提と射程

この系列では、有限次元の実または複素のベクトル空間を基本対象にする。内積、特異値分解、擬似逆行列では、実行列の転置  $A^T$  と複素行列の共役転置  $A^*$  を区別する。正方向列だけで成立する主張と、長方形列にも拡張できる主張も分離して確認する。重要なのは、定理の結論だけでなく、その前提条件を保持することである。たとえば対称行列の直交対角化は任意の対角化可能行列には成立しない。二次形式による極値判定では停留点であることが必要である。このような条件を明示すると、発展項目へ移行しても記述の厳密性が保たれる。

## 4 直感的な見取り図

線型代数の直感は、行列を数表として眺めるより、空間を動かす線型変換として見ると統一しやすい。

概念	幾何的な見方	後で使う判断
列空間	入力から到達できる出力方向の全体	解が存在するか
核	零へ潰れる入力方向	情報が失われるか
階数	潰れずに残る次元	写像がどれだけ情報を保つか
行列式	面積・体積の伸縮率	可逆か、向きが反転するか
固有値	方向が変わらない軸の倍率	変換を方向ごとに分解できるか
内積	長さ・角度・直交を測る道具	射影や最小二乗法が使えるか

この見取り図を先に持つと、掃き出し、行列式、対角化、直交化が別々の計算手順ではなく、空間をどう保ち、どこを潰し、どの方向を見やすくするかという一連の操作として接続する。

## 5 変わるものと保存されるもの

線型代数では、計算そのものよりも「その操作で何を変え、何を変えないか」を追跡することが重要である。同じ行列の見た目が変わっても、写像そのものや解集合が変わらない場合がある。逆に、階数は変わらなくても、未知数の意味が変わる場合もある。

操作・見方	変わるもの	保存されるもの	確認する理由
基底変換	座標表示、表現行列	ベクトルそのもの、線型写像	表示と対象を混同しないため
行基本変形	方程式の見た目、列空間の配置	連立方程式の解集合、階数、核	掃き出しで解を読む根拠になるため
列基本変形	未知数の座標、行空間の表示	列空間、階数	生成系の取り替えとして理解するため
直交射影	ベクトルを部分空間の成分と誤差へ分解する	部分空間に最も近い点という性質	最小二乗法の理由になるため
対角化	座標軸、行列表示	線型写像、固有値、特性多項式	複雑な変換を方向ごとの倍率に分解するため

この表は、後の講義で証明する性質を先取りしている。順序としては少し先を見ることになるが、「なぜその操作を考えるのか」は、保存される量を知ると理解しやすい。

## 6 0. 線型性・線型写像・行列の列

最初に置くのは、線型性そのものである。線型性とは、加法性と同次性により、線型結合を作ってから写しても、写してから同じ係数で線型結合しても一致するという性質である。この見方を先に置くと、基底ベクトルの像だけで線型写像が決まる理由が分かる。行列の列は、その基底ベクトルの像を記録したものである。以後の行列積、階数、可逆性、固有値は、すべてこの見方の上に積み上げる。

→ 講義 線型性の基本 [lecture](https://study.bem130.com/lecture/math/linear-algebra/) [math](#) [linear-algebra](#)  
<https://study.bem130.com/lecture/math/linear-algebra/線型性の基本-講義/>

→ 講義 ベクトルの基本演算 [lecture](https://study.bem130.com/lecture/math/linear-algebra/) [math](#) [linear-algebra](#)  
<https://study.bem130.com/lecture/math/linear-algebra/ベクトルの基本演算-講義/>

→ 講義 線型結合と張る空間の基本 [lecture](https://study.bem130.com/lecture/math/linear-algebra/) [math](#) [linear-algebra](#)  
<https://study.bem130.com/lecture/math/linear-algebra/線型結合と張る空間の基本-講義/>

→ [講義](#) [ベクトル空間と基底](#) [lecture](#) [math](#) [linear-algebra](#)  
https://study.bem130.com/lecture/math/linear-algebra/ベクトル空間と基底-講義/

→ [講義](#) [線型写像と行列](#) [lecture](#) [math](#) [linear-algebra](#)  
https://study.bem130.com/lecture/math/linear-algebra/線型写像と行列-講義/

## 7 1. 計算道具の基礎

線型写像としての見方を持ったら、つぎに行列を実際に扱うための計算道具を整える。行列の和、スカラー倍、積、単位行列、零行列、転置は、線型写像を座標表示で扱うための基本語彙である。ここでの注意点は、計算を線型写像から切り離さないことである。行列積は写像の合成であり、単位行列は何も変えない写像であり、零行列は全てを零へ潰す写像である。この意味を保ったまま成分計算へ入ると、計算規則が暗記ではなく構造として見える。

→ [講義](#) [行列の基本演算](#) [lecture](#) [math](#) [linear-algebra](#)  
https://study.bem130.com/lecture/math/linear-algebra/行列の基本演算-講義/

→ [講義](#) [行列の積の意味](#) [lecture](#) [math](#) [linear-algebra](#)  
https://study.bem130.com/lecture/math/linear-algebra/行列の積の意味-講義/

→ [講義](#) [単位行列・零行列・転置の基本](#) [lecture](#) [math](#) [linear-algebra](#)  
https://study.bem130.com/lecture/math/linear-algebra/単位行列・零行列・転置の基本-講義/

## 8 2. 連立一次方程式・基本変形・可逆性

行列を線型写像として見ると、連立一次方程式  $Ax = b$  は「出力  $b$  に到達する入力  $x$  を探す問題」になる。掃き出し法は解法であると同時に、階数、像、核、自由度を判定する方法である。行基本変形は方程式の同値性を保つ。列基本変形は列空間と階数を保つが、未知数の座標を変える。逆行列は、情報が失われず任意の出力から入力を一意に復元できる条件として理解する。

→ [講義](#) [列ベクトルの独立性と階数への橋渡し](#) [lecture](#) [math](#) [linear-algebra](#)  
https://study.bem130.com/lecture/math/linear-algebra/列ベクトルの独立性と階数への橋渡し-講義/

→ [講義](#) [連立一次方程式と拡大係数行列](#) [lecture](#) [math](#) [linear-algebra](#)  
https://study.bem130.com/lecture/math/linear-algebra/連立一次方程式と拡大係数行列-講義/

→ [講義](#) [連立一次方程式と掃き出し法](#) [lecture](#) [math](#) [linear-algebra](#)  
https://study.bem130.com/lecture/math/linear-algebra/連立一次方程式と掃き出し法-講義/

→ [講義](#) [行基本変形の基本](#) [lecture](#) [math](#) [linear-algebra](#)  
https://study.bem130.com/lecture/math/linear-algebra/行基本変形の基本-講義/

→ [講義](#) [列基本変形の基本](#) [lecture](#) [math](#) [linear-algebra](#)  
https://study.bem130.com/lecture/math/linear-algebra/列基本変形の基本-講義/

→ [講義](#) [階段形と簡約階段形](#) [lecture](#) [math](#) [linear-algebra](#)  
<https://study.bem130.com/lecture/math/linear-algebra/階段形と簡約階段形-講義/>

→ [講義](#) [階数の基本](#) [lecture](#) [math](#) [linear-algebra](#)  
<https://study.bem130.com/lecture/math/linear-algebra/階数の基本-講義/>

→ [講義](#) [逆行列の基本](#) [lecture](#) [math](#) [linear-algebra](#)  
<https://study.bem130.com/lecture/math/linear-algebra/逆行列の基本-講義/>

→ [講義](#) [逆行列の計算手順](#) [lecture](#) [math](#) [linear-algebra](#)  
<https://study.bem130.com/lecture/math/linear-algebra/逆行列の計算手順-講義/>

## 9 3. 基底変換・相似

change of basis      similarity

基底変換では、ベクトルや線型写像そのものではなく、座標表示が変わる。相似は同じ線型写像を別の基底で表す関係であり、対角化の準備になる。

→ [講義](#) [基底変換と相似](#) [lecture](#) [math](#) [linear-algebra](#)  
<https://study.bem130.com/lecture/math/linear-algebra/基底変換と相似-講義/>

→ [講義](#) [線型写像と行列](#) [lecture](#) [math](#) [linear-algebra](#)  
<https://study.bem130.com/lecture/math/linear-algebra/線型写像と行列-講義/>

## 10 4. 行列式・体積倍率・可逆性

determinant      volume scale factor      invertibility

→ [講義](#) [行列式](#) [lecture](#) [math](#) [linear-algebra](#)  
<https://study.bem130.com/lecture/math/linear-algebra/行列式-講義/>

→ [講義](#) [行列式の計算規則](#) [lecture](#) [math](#) [linear-algebra](#)  
<https://study.bem130.com/lecture/math/linear-algebra/行列式の計算規則-講義/>

→ [講義](#) [余因子展開と可逆性の判定](#) [lecture](#) [math](#) [linear-algebra](#)  
<https://study.bem130.com/lecture/math/linear-algebra/余因子展開と可逆性の判定-講義/>

行列式は、正方行列が面積・体積をどれだけ伸縮し、向きを保つか反転するかを測る量である。行列式が0でないことは、空間を潰さず、入力を復元できることと対応する。

## 11 5. 内積・直交・射影

inner product      orthogonality      projection

線型性だけでは、長さや角度は扱えない。内積を入れると、ベクトルの長さ、角度、直交、射影を測れるようになる。直交射影は、部分空間へ最も近い点を選ぶ操作であり、最小二乗法の幾何的な理由になる。

→ [講義](#) [ノルムと三角不等式](#) [lecture](#) [math](#) [linear-algebra](#)  
<https://study.bem130.com/lecture/math/linear-algebra/ノルムと三角不等式-講義/>

→ [講義](#) [内積空間の基本](#) [lecture](#) [math](#) [linear-algebra](#)  
<https://study.bem130.com/lecture/math/linear-algebra/内積空間の基本-講義/>

→ [講義](#) [複素内積とユニタリ行列](#) [lecture](#) [math](#) [linear-algebra](#)  
https://study.bem130.com/lecture/math/linear-algebra/複素内積とユニタリ行列-講義/

→ [講義](#) [直交化の基本](#) [lecture](#) [math](#) [linear-algebra](#)  
https://study.bem130.com/lecture/math/linear-algebra/直交化の基本-講義/

→ [講義](#) [直交補空間と射影](#) [lecture](#) [math](#) [linear-algebra](#)  
https://study.bem130.com/lecture/math/linear-algebra/直交補空間と射影-講義/

→ [講義](#) [最小二乗法の基本](#) [lecture](#) [math](#) [linear-algebra](#)  
https://study.bem130.com/lecture/math/linear-algebra/最小二乗法の基本-講義/

## 12 6. 固有値・固有ベクトル・対角化

eigenvalue      eigenvector      diagonalization

→ [講義](#) [固有値と固有ベクトル](#) [lecture](#) [math](#) [linear-algebra](#)  
https://study.bem130.com/lecture/math/linear-algebra/固有値と固有ベクトル-講義/

→ [講義](#) [対角化の基本](#) [lecture](#) [math](#) [linear-algebra](#)  
https://study.bem130.com/lecture/math/linear-algebra/対角化の基本-講義/

固有値は、固有ベクトルの方向を変えずに伸縮する倍率である。対角化は、固有ベクトルからなる基底を選択して線型写像を方向ごとの倍率に分解する方法である。

## 13 7. 内積と固有値の交点

inner product      eigenvector      eigenvalue

→ [講義](#) [対称行列と直交対角化](#) [lecture](#) [math](#) [linear-algebra](#)  
https://study.bem130.com/lecture/math/linear-algebra/対称行列と直交対角化-講義/

→ [講義](#) [二次形式と正定値行列](#) [lecture](#) [math](#) [linear-algebra](#)  
https://study.bem130.com/lecture/math/linear-algebra/二次形式と正定値行列-講義/

対称行列とエルミート行列では、固有ベクトルを正規直交基底として選択できる。二次形式と正定値行列は、固有値が符号・凸性・最適化に接続することを確認する内容である。複素では、正規行列がユニタリ対角化の基準になる。エルミート行列は正規行列のうち固有値が実数となる特別な場合であり、二次形式や正定値性へ接続しやすい。複素の流れでは、共役転置・随伴を確認してから、エルミート行列、ユニタリ行列、正規行列へ進むと理解しやすい。

→ [講義](#) [複素内積とユニタリ行列](#) [lecture](#) [math](#) [linear-algebra](#)  
https://study.bem130.com/lecture/math/linear-algebra/複素内積とユニタリ行列-講義/

## 14 8. 発展への入口

→ [講義](#) [最小多項式の基本](#) [lecture](#) [math](#) [linear-algebra](#)  
https://study.bem130.com/lecture/math/linear-algebra/最小多項式の基本-講義/

→ [講義](#) [ジョルダン標準形の入口](#) [lecture](#) [math](#) [linear-algebra](#)  
<https://study.bem130.com/lecture/math/linear-algebra/ジョルダン標準形の入口-講義/>

→ [講義](#) [特異値分解の入口](#) [lecture](#) [math](#) [linear-algebra](#)  
<https://study.bem130.com/lecture/math/linear-algebra/特異値分解の入口-講義/>

→ [講義](#) [擬似逆行列の基本](#) [lecture](#) [math](#) [linear-algebra](#)  
<https://study.bem130.com/lecture/math/linear-algebra/擬似逆行列の基本-講義/>

最小多項式とジョルダン標準形は、対角化できない行列の構造を記述する。特異値分解と擬似逆行列は、長方形行列や階数落ちの行列を射影・最小二乗法と接続する。発展では、ジョルダン標準形の一意性、コンパクトSVD、Eckart-Youngの定理、ペンローズの条件まで確認する。

## 15 演習リンク

講義で定義と理由を確認したら、演習では計算できるかだけでなく、何を保存し、何を操作なのかを診断する。具体例は理解を固定するためのもの、演習問題は自分で判断できるかを確認するためのものである。

→ [基本演習](#) [線型性と線型写像](#) [exercise](#) [math](#) [linear-algebra](#)  
<https://study.bem130.com/exercise/math/linear-algebra/線型性と線型写像-基本演習/>

→ [基本演習](#) [ベクトルと線型結合](#) [exercise](#) [math](#) [linear-algebra](#)  
<https://study.bem130.com/exercise/math/linear-algebra/ベクトルと線型結合-基本演習/>

→ [基本演習](#) [行列計算と線型変換](#) [exercise](#) [math](#) [linear-algebra](#)  
<https://study.bem130.com/exercise/math/linear-algebra/行列計算と線型変換-基本演習/>

→ [基本演習](#) [基底変換と相似](#) [exercise](#) [math](#) [linear-algebra](#)  
<https://study.bem130.com/exercise/math/linear-algebra/基底変換と相似-基本演習/>

→ [基本演習](#) [基本変形と連立一次方程式](#) [exercise](#) [math](#) [linear-algebra](#)  
<https://study.bem130.com/exercise/math/linear-algebra/基本変形と連立一次方程式-基本演習/>

→ [基本演習](#) [行列式と可逆性](#) [exercise](#) [math](#) [linear-algebra](#)  
<https://study.bem130.com/exercise/math/linear-algebra/行列式と可逆性-基本演習/>

→ [基本演習](#) [ベクトル空間・基底・階数](#) [exercise](#) [math](#) [linear-algebra](#)  
<https://study.bem130.com/exercise/math/linear-algebra/ベクトル空間・基底・階数-基本演習/>

→ [基本演習](#) [内積・直交・射影](#) [exercise](#) [math](#) [linear-algebra](#)  
<https://study.bem130.com/exercise/math/linear-algebra/内積・直交・射影-基本演習/>

→ [基本演習](#) [複素内積とユニタリ行列](#) [exercise](#) [math](#) [linear-algebra](#)  
<https://study.bem130.com/exercise/math/linear-algebra/複素内積とユニタリ行列-基本演習/>

→ [基本演習](#) [固有値・対角化・発展](#) [exercise](#) [math](#) [linear-algebra](#)  
<https://study.bem130.com/exercise/math/linear-algebra/固有値・対角化・発展-基本演習/>

## 16 推奨順序

### 16.1 線型性から入る推奨経路

- 線型性を加法性と同次性から確認する。
- ベクトルの基本演算を、線型性によって保存される操作として確認する。
- 線型結合と生成空間を確認する。
- 基底により任意のベクトルを一意に表せることを確認する。
- 線型写像を、基底ベクトルの像で決まる変換として理解する。
- 行列の列を、基底ベクトルの像として読む。
- 行列の積を、線型写像の合成として整理する。
- 階数を像の次元、核を零へ潰れる入力方向として読む。
- 連立一次方程式、行基本変形、可逆性を写像の情報保存として理解する。
- 基底変換で表示だけを変える感覚を確認する。
- 行列式を体積倍率、内積を長さと角度、固有値を方向ごとの倍率として接続する。

### 16.2 計算から入る補助経路

- 行列の基本演算とサイズ条件を確認する。
- 行基本変形と階段形を用いて掃き出し法へ進行する。
- 逆行列の計算手順と行列式の計算規則を確認する。
- 計算で得たピボット、階数、行列式を、線型写像の像・核・体積倍率として読み直す。