線型写像と行列

1 導入

線型代数で最重要なのは、**行列を数表としてではなく、「ベクトルをどう移すか」を表した座標表示として理解すること**である。

行列の計算だけを追跡すると、掛け算や成分計算の規則だけが残存する。しかし本体は、空間の中でベクトルをどう変換するかという作用である。この講義では、基底の像から行列が決定されることと、列ベクトルが何を表しているかを接続する。

2 用語と定義

線型写像とは、ベクトルの加法とスカラー倍を保つ写像である。正確には、すべてのベクトル u, v とすべてのスカラー c について

$$T(u+v) = T(u) + T(v), \qquad T(cu) = cT(u)$$

を満たす写像である。

前半の

$$T(u+v) = T(u) + T(v)$$

を加法性という。これは「先に足してから写しても、先に写してから足しても同じ」という条件である。幾何的には、ベクトルの平行四辺形の合成のしかたを壊さない、という意味になる。

後半の

$$T(cu) = cT(u)$$

を同次性という。これは「先に c 倍してから写しても、写してから c 倍しても同じ」という条件である。幾何的には、原点を通る直線の上での倍率の関係を保つ、という意味になる。

線型性とは、この加法性と同次性を同時に満たす性質である。どちらか片方だけでは十分ではない。

線型写像では、より一般に

$$T(c_1 v_1 + \cdots + c_k v_k) = c_1 T(v_1) + \cdots + c_k T(v_k)$$

が成り立つ。つまり、線型結合を作ってから写すことと、各ベクトルを写してから同じ係数で線型結合することが一致する。

この性質があるから、基底ベクトルの行き先だけで写像全体が決まる。逆にいうと、線型性がなければ、基底の像を知っても、それらの和やスカラー倍がどこへ行くかを復元できない。

線型写像が保存するのは、和、スカラー倍、線型結合、部分空間としての構造である。ただし、すべてをそのまま保つわけではない。異なるベクトルが同じベクトルへ潰れることはあり、長さ・角度・面積・体積

も一般には変化する。したがって、線型写像は「空間の加法と倍率の骨組みを保つ変換」だと理解するとよい。

行列は、ある基底を選択したときの線型写像の表現である。

座標写像とは、基底 B に関してベクトル v を座標ベクトル $[v]_B$ へ対応させる写像である。

表現行列とは、線型写像 $T : V \to W$ を、定義域の基底 B と終域の基底 C に関する座標で記述した行列である。

3 方針

線型写像を理解するときは、まず基底ベクトルがどう移るかを確認する。あとは線型性により全体が決定される。

→ 講義 ベクトル空間と基底 lecture math linear-algebra
https://study.bem130.com/lecture/math/linear-algebra/ベクトル空間と基底-講義/

→ 講義 線型性の基本 lecture math linear-algebra
https://study.bem130.com/lecture/math/linear-algebra/線型性の基本-講義/

→ 講義 行列の積の意味 lecture math linear-algebra
https://study.bem130.com/lecture/math/linear-algebra/行列の積の意味-講義/

→ 講義 基底変換と相似 lecture math linear-algebra
https://study.bem130.com/lecture/math/linear-algebra/基底変換と相似-講義/

→ 講義 連立一次方程式と掃き出し法 lecture math linear-algebra
https://study.bem130.com/lecture/math/linear-algebra/連立一次方程式と掃き出し法-講義/

4 直感的な説明

4.1 1. 写像としての解釈

線型写像は、原点を原点へ保ち、和とスカラー倍を保つ変換である。原点を通る直線は直線または 1 点へ移る。拡大、縮小、回転、せん断は、どれも線型写像の典型例である。

この定義を採る理由は、ベクトルの和と定数倍という空間の基本操作を壊さない変換だけを抽出するためである。これにより、基底の像から全体を復元できる。

4.2 2. 列ベクトルの意味

行列の列をただの数字の並びとして処理すると、その意味が不明瞭になる。一般の基底では、各列は「基底ベクトル 1 本の像そのもの」ではなく、終域の基底に関する座標である。標準基底の場合だけ、列が像そのものとして解釈できる。

4.3 3. 計算とのつながり

座標ベクトルに行列を掛けるときは、入力 ベクトルの係数を用いて、基底の像を線型結合している。つまり、行列積は謎の規則ではなく、「基底の像を組み合わせて 出力 を構成する」操作そのものである。

5 厳密な説明

5.1 1. 基底の像で写像が決まる

基底 $e_1, \dots, e_n$ を採用すると、任意のベクトル v は

$$v = x_1 e_1 + \cdots + x_n e_n$$

と表示できる。すると線型性により

$$T(v) = x_1 T(e_1) + \cdots + x_n T(e_n)$$

である。したがって $T(e_i)$ が判明すれば T は完全に決定される。

ここで直感的な説明で示した「 列 が基底の像を 表す」という 主張が、ちょうどこの 式 に対応する。

5.2 2. 行列の 列 は何か

まず標準基底で考察する。この $T(e_i)$ を 列 として並べたものが、線型写像の 行列 である。つまり

$$A = \begin{pmatrix} | & & | \\ T(e_1) & \cdots & T(e_n) \\ | & & | \end{pmatrix}$$

と 解釈できる、ということである。

すると 入力 ベクトル $x = (x_1, \dots, x_n)^T$ に対して

$$Ax = x_1 T(e_1) + \cdots + x_n T(e_n)$$

となり、行列積が列ベクトルの線型結合になっていることを確認できる。

つまり行列積の定義も、「基底の像を 入力 の係数で組み合わせる」と 解釈 できるように設定されている、ということである。ここが「なぜこの掛け算なのか」への回答である。

この 解釈 を確認すると、行列積 AB も「まず B を適用し、その結果に A を適用する」という合成写像の 表現 だと理解できる。つまり行列積の 順序 が 重要 なのは、写像の 合成 の 順序 が 重要 であるためである。

5.3 3. 座標写像と 表現行列

定義域 V の順序付き基底を

$$B = (v_1, \dots, v_n)$$

終域 W の順序付き基底を

$$C = (w_1, \dots, w_m)$$

とする。基底 B を選択すると、座標写像

$$[\cdot]_B : V \to F^n$$

が定義される。同様に C から

$$[\cdot]_C : W \to F^m$$

が定義される。ここで F は実数体または複素数体である。
このとき線型写像 $T : V \to W$ の表現行列 $[T]_{C\leftarrow B}$ は、

$$[T(x)]_C = [T]_{C\leftarrow B}[x]_B$$

を任意の $x \in V$ について満たす唯一の $m \times n$ 行列として定義される。矢印 $C \leftarrow B$ は、B の座標から C の座標へ変換することを表す。
各 j について

$$T(v_j) = a_{1j}w_1 + \cdots + a_{mj}w_m$$

と表示したとき、係数 a_{ij} を並べた

$$A = (a_{ij})$$

が $[T]_{C\leftarrow B}$ である。このとき A の第 j 列は、$T(v_j)$ そのものではない。正確には

$$[T(v_j)]_C$$

である。したがって、行列は線型写像そのものではなく、定義域と終域の基底を選択した後に得られる座標表示である。

5.4 4. 合成と行列積

線型写像

$$T : V \to W, \qquad S : W \to Z$$

を考察する。V, W, Z の基底をそれぞれ B, C, D とすると、合成写像 $S \circ T : V \to Z$ の表現行列は

$$[S \circ T]_{D\leftarrow B} = [S]_{D\leftarrow C}[T]_{C\leftarrow B}$$

である。順序は右から左へ作用する。すなわち、まず $[T]_{C\leftarrow B}$ が B 座標を C 座標へ変換し、つぎに $[S]_{D\leftarrow C}$ が C 座標を D 座標へ変換する。
したがって行列積の順序が逆向きに感じられる理由は、関数合成の記法で「先に適用する写像」を右側に置くためである。行列積は単なる成分計算ではなく、座標表示された写像の合成である。

5.5 5. 標準基底での具体例

たとえば $\mathbb{R}^2$ で

$$T(e_1) = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad T(e_2) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

なら、行列は

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

である。したがって

$$A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = x\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x \\ x + y \end{pmatrix}$$

となる。この具体例で確認できるのは、行列の各列が写像の作用を直接保持している、ということである。

5.6 6. 非標準基底での具体例

同一の写像であっても、基底を変更すると表現行列は変化する。$\mathbb{R}^2$ の線型写像

$$T(x,y)=(2x,y)$$

を考察する。標準基底では

$$A_{\mathrm{std}}=\begin{pmatrix}2&0\\0&1\end{pmatrix}$$

である。

つぎに非標準基底

$$B=(b_1,b_2),\qquad b_1=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix},\quad b_2=\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$$

を採用する。このとき

$$T(b_1)=\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}=\frac{3}{2}b_1+\frac{1}{2}b_2$$

であり、

$$T(b_2)=\begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix}=\frac{1}{2}b_1+\frac{3}{2}b_2$$

である。したがって B に関する表現行列は

$$[T]_B=\begin{pmatrix}\frac{3}{2}&\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}&\frac{3}{2}\end{pmatrix}$$

となる。

具体なベクトル $x=(3,1)^T$ で確認する。これは

$$x=2b_1+b_2,\qquad [x]_B=\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$$

である。したがって

$$[T]_B[x]_B=\begin{pmatrix}\frac{3}{2}&\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}&\frac{3}{2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{7}{2}\\\frac{5}{2}\end{pmatrix}$$

である。この座標は

$$\frac{7}{2}b_1+\frac{5}{2}b_2=\begin{pmatrix}6\\1\end{pmatrix}$$

を表す。一方、写像を直接適用しても

$$T(3,1)=(6,1)$$

を得る。したがって変化したのは写像ではなく、座標系と表現行列である。

5.7 7. 基底を変えると表現行列はどう変わるか

同じ空間 V の旧基底と新基底を考察する。座標変換行列 P が

$$[x]_{\mathrm{old}}=P[x]_{\mathrm{new}}$$

を満たすとする。$T : V \to V$ の旧基底での表現行列を A_{old} とすれば、

$$[T(x)]_{\text{old}} = A_{\text{old}}[x]_{\text{old}}$$

である。これを新基底の座標へ変換すると

$$[T(x)]_{\text{new}} = P^{-1}[T(x)]_{\text{old}} = P^{-1}A_{\text{old}}P[x]_{\text{new}}$$

となる。したがって

$$A_{\text{new}} = P^{-1}A_{\text{old}}P$$

である。定義域と終域の基底を別々に変える場合は、定義域側の変換を P、終域側の変換を Q として

$$A_{\text{new}} = Q^{-1}A_{\text{old}}P$$

となる。この式が、対角化で現れる $P^{-1}AP$ の基礎である。

同じ空間の基底だけを変更する場合、$A_{\text{new}} = P^{-1}A_{\text{old}}P$ の関係にある 2 つの行列を相似であるという。相似な行列は同一の線型写像を異なる基底で表示したものであり、固有値、特性多項式、最小多項式を共有する。

6 別の観点

6.1 幾何的な観点

線型写像は、平面や空間を伸長、縮小、回転、せん断する変換である。この観点では、像は「どこへ送られるか」、核は「どの方向がつぶれるか」を表す。

たとえば行列 A に対して $Ax = 0$ を解くのは、写像で原点へつぶれる方向を検出することである。したがって掃き出し法で核を確認する計算は、幾何的には「どの自由度が消えるか」を判定する操作となる。

6.2 代数的な観点

座標計算の立場では、行列は成分の表である。入力の係数をどう組み替えるかを追跡すれば、写像の作用を数式として確認できる。

6.3 構造的な観点

写像の立場では、行列は空間をどう変換するかそのものである。この 2 つを結合するのが、基底の像という観点である。つまり行列は本体ではなく、線型写像をある基底で表示したものだと考察するのが大学数学での自然な立場である。

7 どこまで成り立つか

行列は基底に依存するが、線型写像そのものは基底に依存しない。

基底を変更すると同じ写像であっても別の行列になる。したがって、行列だけを確認して「これが変換そのものだ」と誤認すると、基底依存の部分を看過する。

8 判定基準

- 列ごとの意味が問われているなら、「基底ベクトルの像」として解釈するのが自然である。
- 行列積が何をしているか不明瞭になったら、「列ベクトルの線型結合」へ還元する。
- 基底を変更する議論が出現したら、写像そのものと行列の表示を区別して考察する。

9 最終形

線型写像は基底の像で決まる

行列は線型写像の座標表示である

$$\boxed{[T(x)]_C = [T]_{C\leftarrow B}[x]_B}$$

$$\boxed{\text{第}\, j\ \text{列} = [T(v_j)]_C}$$

$$\boxed{[T(v)]_C = A[v]_B}$$

$$\boxed{[S\circ T]_{D\leftarrow B} = [S]_{D\leftarrow C}[T]_{C\leftarrow B}}$$

基底変換と相似は別ページで詳しく扱う

10 一言でいうと

- 行列の本体は線型写像であり、行列は基底選択の後の座標表示である。
- 一般の基底では、列は基底の像の座標を表す。
- 基底を変更すると、同じ線型写像であっても表現行列は変化する。

11 演習リンク

→ 基本演習 **線型性と線型写像** exercise math linear-algebra
https://study.bem130.com/exercise/math/linear-algebra/線型性と線型写像-基本演習/

→ 基本演習 **行列計算と線型変換** exercise math linear-algebra
https://study.bem130.com/exercise/math/linear-algebra/行列計算と線型変換-基本演習/

12 関連(かんれん)リンク

→ 講義 ベクトル空間と基底 lecture math linear-algebra
https://study.bem130.com/lecture/math/linear-algebra/ベクトル空間と基底-講義/

→ 講義 線型性の基本 lecture math linear-algebra
https://study.bem130.com/lecture/math/linear-algebra/線型性の基本-講義/

→ 講義 行列の積の意味 lecture math linear-algebra
https://study.bem130.com/lecture/math/linear-algebra/行列の積の意味-講義/

→ 講義 基底変換と相似 lecture math linear-algebra
https://study.bem130.com/lecture/math/linear-algebra/基底変換と相似-講義/

→ 講義 階数の基本 lecture math linear-algebra
https://study.bem130.com/lecture/math/linear-algebra/階数の基本-講義/

→ 講義 固有値と固有ベクトル lecture math linear-algebra
https://study.bem130.com/lecture/math/linear-algebra/固有値と固有ベクトル-講義/

→ 講義 対角化の基本 lecture math linear-algebra
https://study.bem130.com/lecture/math/linear-algebra/対角化の基本-講義/