線型性の基本

linearity

1 導入

線型代数を行列の計算規則から始めると、なぜその規則を考えるのかが見えにくい。先に置くべき問いは、「どのような変換なら、基底ベクトルの像だけで空間全体の行き先が決まるか」である。

その答えが線型性である。線型性は、ベクトルの加法とスカラー倍という基本操作を保つ性質である。この性質があるから、線型結合、基底、行列の列、階数、核が一つの流れでつながる。

2 用語と定義

線型写像とは、ベクトル空間 V, W の間の写像 $T : V \to W$ で、すべての $u, v \in V$ とすべてのスカラー c について

$$T(u+v) = T(u) + T(v)$$

および

$$T(cu) = cT(u)$$

を満たすものである。

前者を加法性、後者を同次性という。線型性とは、加法性と同次性を同時に満たすことである。

加法性は「足してから写す」と「写してから足す」が一致することを表す。同次性は「スカラー倍してから写す」と「写してからスカラー倍する」が一致することを表す。

→ 講義 ベクトルの基本演算 lecture math linear-algebra
https://study.bem130.com/lecture/math/linear-algebra/ベクトルの基本演算-講義/

3 方針

線型性を理解するときは、いきなり行列の成分へ入らない。まず、線型写像が何を保存し、何を変えうるかを確認する。

保存されるのは、和、スカラー倍、線型結合、部分空間としての構造である。一方、長さ、角度、面積、体積、異なるベクトルの区別は一般には保存されない。零へ潰れる方向があれば、情報は失われる。

→ 講義 線型結合と張る空間の基本 lecture math linear-algebra
https://study.bem130.com/lecture/math/linear-algebra/線型結合と張る空間の基本-講義/

4 直感的な説明

4.1 1. 線型性は骨組みを保つ

ベクトル空間では、新しいベクトルを作る基本操作は和とスカラー倍である。線型写像は、この 2 つの操作と順序を入れ替えても結果が変わらない写像である。
このため、線型写像は空間を曲げる変換ではなく、直線的な組み合わせの関係を保つ変換である。原点を通る直線は直線または一点へ移り、平面は平面・直線・一点のいずれかへ移る。

4.2 2. 線型結合がそのまま移る

加法性と同次性を組み合わせると、

$$T(c_1v_1+\cdots+c_kv_k)=c_1T(v_1)+\cdots+c_kT(v_k)$$

が得られる。左辺は「材料を混ぜてから写す」、右辺は「材料を写してから同じ係数で混ぜる」である。
線型性は、この 2 つが一致するという性質である。

4.3 3. 基底ベクトルの像だけで全体が決まる

基底 $e_1,\dots,e_n$ を選ぶと、任意のベクトル x は

$$x=x_1e_1+\cdots+x_ne_n$$

と一意に表せる。線型写像 T に適用すると、

$$T(x)=x_1T(e_1)+\cdots+x_nT(e_n)$$

である。したがって $T(e_1),\dots,T(e_n)$ が分かれば、すべての x に対する $T(x)$ が分かる。

→ 講義 ベクトル空間と基底 lecture math linear-algebra
https://study.bem130.com/lecture/math/linear-algebra/ベクトル空間と基底-講義/

4.4 4. 行列の列は基底の像である

標準基底で考えると、行列は

$$A=\begin{pmatrix} | & & | \\ T(e_1) & \cdots & T(e_n) \\ | & & | \end{pmatrix}$$

と作られる。この式は、行列の第 j 列が $T(e_j)$ であることを意味する。
入力 $x=(x_1,\dots,x_n)^T$ に対して

$$Ax=x_1T(e_1)+\cdots+x_nT(e_n)$$

となるので、行列積は列ベクトルを入力成分で線型結合していると読める。

→ 講義 線型写像と行列 lecture math linear-algebra
https://study.bem130.com/lecture/math/linear-algebra/線型写像と行列-講義/

5 厳密な説明

5.1 1. 零ベクトルは零ベクトルへ移る

線型写像 T では、まず

$$T(0) = T(0+0) = T(0) + T(0)$$

である。両辺に $-T(0)$ を加えると

$$T(0) = 0$$

を得る。

この結論により、原点を原点へ送らない写像は線型ではないとすぐに判定できる。たとえば $S(x) = Ax + b$ は、$b \neq 0$ なら $S(0) = b \neq 0$ なので線型写像ではない。

5.2 2. 線型結合の保存

$k = 1$ の場合は同次性そのものである。$k = 2$ の場合は

$$T(c_1 v_1 + c_2 v_2) = T(c_1 v_1) + T(c_2 v_2) = c_1 T(v_1) + c_2 T(v_2)$$

である。同じ議論を繰り返すと、有限個の線型結合について

$$T(c_1 v_1 + \cdots + c_k v_k) = c_1 T(v_1) + \cdots + c_k T(v_k)$$

が成り立つ。$k = 0$ の空和を考える場合は、空線型結合を 0 と約束するため、上の $T(0) = 0$ と整合する。

5.3 3. 基底の像による決定

$e_1, \ldots, e_n$ が V の基底なら、任意の $x \in V$ は一意に

$$x = x_1 e_1 + \cdots + x_n e_n$$

と表せる。線型性より

$$T(x) = x_1 T(e_1) + \cdots + x_n T(e_n)$$

である。したがって、$T(e_1), \ldots, T(e_n)$ を指定すれば、T の値は全ての x について一意に決まる。

逆に、基底の像を任意に指定しても、上の式で T を定義すれば線型写像になる。ここで基底表示の一意性が必要である。一意でなければ、同じ x から異なる値が出る危険がある。

6 例題：基底の像から行列を作る

6.1 問題：基底の像から行列を作る

$\mathbb{R}^2$ の線型写像 $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ が

$$T(e_1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \qquad T(e_2) = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

を満たすとする。T の標準基底に関する行列を求め、$T(4, -1)^T$ を計算する。

6.2 解説

行列の列は標準基底の像なので、

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$$

である。また

$$\begin{pmatrix} 4 \\ -1 \end{pmatrix} = 4e_1 - e_2$$

だから、線型性により

$$T\begin{pmatrix} 4 \\ -1 \end{pmatrix} = 4T(e_1) - T(e_2) = 4\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 13 \end{pmatrix}$$

である。行列計算で書くと

$$A\begin{pmatrix} 4 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 13 \end{pmatrix}$$

となる。この具体例で確認しているのは、行列積が基底の像の線型結合であるという点である。

7 操作で変わるもの・保存されるもの

観点	保存されるもの	変わりうるもの
線型写像	和、スカラー倍、線型結合	長さ、角度、面積、体積
基底の像	写像全体を決定できること	選ぶ基底による座標表示
行列の列	標準基底の像という意味	基底を変えたときの成分
零写像	線型性	入力の区別、階数、情報

8 どこまで成り立つか

線型性の定義は、有限次元だけでなく無限次元のベクトル空間にも使える。関数空間での微分や積分も、条件を満たせば線型写像として扱える。

一方、行列として表示するには、基底を選び、その座標で書く必要がある。有限次元では有限個の列を並べればよいが、無限次元では通常の有限行列だけでは表現できない。

境界例も重要である。零写像 $T(x) = 0$ は線型であるが、すべての入力を潰す。1 次元では、線型写像は 1 本の基底ベクトルの像だけで決まる。0 次元の零空間では、空基底と空線型結合を扱うため、$T(0) = 0$ との整合性を確認しておくと議論が安定する。

9 最終形

$$\boxed{\text{線型性} = \text{加法性} + \text{同次性}}$$

$$\boxed{T(c_1 v_1 + \cdots + c_k v_k) = c_1 T(v_1) + \cdots + c_k T(v_k)}$$

線型写像は基底ベクトルの像で決まる

行列の列は標準基底の像を記録する

10 一言でいうと

- 線型性は、ベクトルの和とスカラー倍を保つ性質である。
- 線型写像では、線型結合を作ってから写しても、写してから同じ係数で線型結合しても一致する。
- 基底の像が分かれば、線型写像は全体として決まる。

11 演習リンク

→ 基本演習 **線型性と線型写像** exercise math linear-algebra
https://study.bem130.com/exercise/math/linear-algebra/線型性と線型写像-基本演習/

→ 基本演習 **ベクトルと線型結合** exercise math linear-algebra
https://study.bem130.com/exercise/math/linear-algebra/ベクトルと線型結合-基本演習/

→ 基本演習 **行列計算と線型変換** exercise math linear-algebra
https://study.bem130.com/exercise/math/linear-algebra/行列計算と線型変換-基本演習/

12 関連リンク

→ 講義 **線型結合と張る空間の基本** lecture math linear-algebra
https://study.bem130.com/lecture/math/linear-algebra/線型結合と張る空間の基本-講義/

→ 講義 **ベクトル空間と基底** lecture math linear-algebra
https://study.bem130.com/lecture/math/linear-algebra/ベクトル空間と基底-講義/

→ 講義 **線型写像と行列** lecture math linear-algebra
https://study.bem130.com/lecture/math/linear-algebra/線型写像と行列-講義/

→ 講義 **行列の積の意味** lecture math linear-algebra
https://study.bem130.com/lecture/math/linear-algebra/行列の積の意味-講義/