線型結合と張る空間の基本

linear combination

1 導入

この講義で重要なのは、線型結合は、与えられたベクトルを材料にして到達可能な方向を作る操作であるということである。

基底や階数を理解するには、まず「どのベクトルを組み合わせると、どの範囲まで到達できるか」を確認する必要がある。

2 用語と定義

体 K 上のベクトル空間を考える。ベクトル $v_1, \dots, v_k$ とスカラー $c_1, \dots, c_k \in K$ に対して

$$c_1 v_1 + \dots + c_k v_k$$

を線型結合という。

張る空間とは、すべての線型結合で得られる集合である。

$$\mathrm{span}(v_1, \dots, v_k) = \{c_1 v_1 + \dots + c_k v_k \mid c_1, \dots, c_k \in K\}$$

部分空間とは、零ベクトルを含み、和とスカラー倍で閉じているベクトル集合である。張る空間は、材料ベクトルを含む最小の部分空間である。

なぜ $\mathrm{span}(v_1, \dots, v_k)$ が部分空間になるかを確認しておく。まず $c_1 = \dots = c_k = 0$ と取れば零ベクトルが入る。つぎに

$$x = \sum_{i=1}^{k} a_i v_i, \qquad y = \sum_{i=1}^{k} b_i v_i$$

が span に属するとき、

$$x + y = \sum_{i=1}^{k} (a_i + b_i) v_i$$

も同じ材料ベクトルの線型結合である。また、スカラー $r \in K$ について

$$rx = \sum_{i=1}^{k} (r a_i) v_i$$

も span に属する。したがって、span は零ベクトル、和、スカラー倍を保つ集合であり、部分空間である。

3 方針

2 本のベクトルから始め、係数を変化させるとどの範囲が得られるかを確認する。そのあと、列ベクトルを並べた行列で判定する方法へ接続する。

→ 講義 ベクトルの基本演算 lecture math linear-algebra
https://study.bem130.com/lecture/math/linear-algebra/ベクトルの基本演算-講義/

4 直感的な説明

1 本の非零ベクトルを定数倍すると、原点を通る 1 本の直線が得られる。2 本の向きが異なるベクトルを組み合わせると、平面全体を作れる場合がある。

線型結合は、材料ベクトルから作成可能な全体を調査する操作である。

張る空間は単なる点の集まりではない。零ベクトルを含み、和とスカラー倍で閉じるため、部分空間になる。この性質により、列空間や基底を同じ言葉で記述できる。

5 厳密な説明

$v_1 = (1,0)^T$、$v_2 = (0,1)^T$ とする。このとき

$$av_1 + bv_2 = (a,b)^T$$

である。a, b を自由に選択できるため、$\mathbb{R}^2$ の任意のベクトルを表現できる。

一方、$w_1 = (1,1)^T$、$w_2 = (2,2)^T$ では

$$aw_1 + bw_2 = (a+2b)(1,1)^T$$

であり、得られるのは直線だけである。2 本あっても、方向が重複していれば平面全体は張れない。

6 よくある誤解

- ベクトルの本数が多ければ広い空間を張るとは限らない。方向の重複が重要である。
- 線型結合では、係数を任意に選択する。特定の係数 1 組だけを考察してはならない。
- 張る空間は材料ベクトルの配置で決定される。

7 どこまで成り立つか

線型結合の定義は任意のベクトル空間で成立する。多項式や関数においても、和とスカラー倍が定義されていれば同じ考えを用いる。

8 最終形

$$\boxed{\mathrm{span}(v_1, \ldots, v_k) = \{c_1 v_1 + \cdots + c_k v_k\}}$$

$$\boxed{\text{張る空間は到達可能な線型結合全体である}}$$

$$\boxed{\mathrm{span}(v_1, \ldots, v_k)\ \text{は部分空間である}}$$

9 演習リンク

→ 基本演習 **ベクトルと線型結合** exercise math linear-algebra
https://study.bem130.com/exercise/math/linear-algebra/ベクトルと線型結合-基本演習/

10 関連リンク

→ 講義 **列ベクトルの独立性と階数への橋渡し** lecture math linear-algebra
https://study.bem130.com/lecture/math/linear-algebra/列ベクトルの独立性と階数への橋渡し-講義/

→ 講義 **ベクトル空間と基底** lecture math linear-algebra
https://study.bem130.com/lecture/math/linear-algebra/ベクトル空間と基底-講義/

→ 講義 **零ベクトル・逆ベクトル・標準基底** lecture math vector
https://study.bem130.com/lecture/math/vector/零ベクトル・逆ベクトル・標準基底-講義/