

ぎょうれつしき 行列式 determinant

1 導入

この講義で最も重要なのは、行列式を単なる計算規則ではなく、「面積や体積をどれだけ伸ばすか」と「逆行列があるか」を同時に判定する量として理解することである。

2 用語と定義

行列式は、 $n \times n$ 行列に対して定まる数で、2次では

$$\det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = ad - bc$$

である。

3 方針

2次では平行四辺形の面積から導入し、つぎに連立一次方程式や逆行列との接続を確認する。さらに高次元では、多重線型性・交代性・正規化という定義原理で特徴づける。

4 直感的な説明

列ベクトルを2本並べると、平行四辺形が定まる。行列式の絶対値は、その面積である。符号は向きの反転を表す。

したがって $\det A = 0$ とは、面積が0、つまり2本の列が一直線上に潰れているということである。このとき逆には復元できない。

5 厳密な説明

5.1 1.2 次の公式

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

に対して

$$\det A = ad - bc$$

である。

5.2 2. なぜ0が特別か

$\det A \neq 0$ なら、 A^{-1} が存在し、

$$A^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

と表示できる。したがって $\det A = 0$ では分母が 0 になり、逆行列 inverse matrix を構成できない。

5.3 3. 具体例

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

なら

$$\det A = 2 \cdot 1 - 1 \cdot 1 = 1$$

である。これは面積を 1 倍のまま保ちつつ、形だけを変えていると解釈できる。

一方

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$$

では

$$\det B = 1 \cdot 4 - 2 \cdot 2 = 0$$

である。列が比例していて、平面を直線へ潰す。

5.4 4. 高次元での定義原理

一般の $n \times n$ 行列の行列式は、2 次の公式 $ad - bc$ を形式的に延長したものではない。本質は、列ベクトル

が構成する向き付けられた体積を測定する関数として、次の 3 条件で特徴づけられることにある。

1. 各列について線型である。
2. 2 本の列が等しいと 0 になる。列を交換すると符号が反転する。
3. $\det I = 1$ である。

この 3 条件を満たす関数が一意に存在し、それを行列式と呼ぶ。置換を用いると

$$\det A = \sum_{\sigma \in S_n} \text{sgn}(\sigma) a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} \cdots a_{n\sigma(n)}$$

とも表示できる。この式は計算のためだけでなく、交代性と多重線型性が同時に組み込まれていることを示す。

6 別の観点

幾何的には面積・体積の伸縮率である。代数的には逆行列の存在条件である。連立一次方程式の立場では、「解が 1 つに決定されるか」を判定する量である。

7 判定基準

- 逆行列の存在、連立一次方程式の一意解、面積や体積の伸縮が問われたら行列式を検討する。
- 列ベクトルどうしが独立かどうかを数値で判定したいときにも、行列式が有効である。

8 どこまで成り立つか

2次や3次では公式を直接記述できるが、高次元では置換や余因子展開などの定義が必要になる。この場合においても「体積の伸縮と可逆性を判定する」という本質は変わらない。

9 最終形

$$\det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = ad - bc$$

$$\det A \neq 0 \iff A \text{ は可逆}$$

\det は多重線型性・交代性・ $\det I = 1$ で特徴づけられる

10 一言でいうと

- 行列式は、空間をどれだけ潰すか、どれだけ伸長するかを表す数である。
- 0になると逆には復元できない。

11 演習リンク

→ 基本演習 行列式と可逆性 [exercise](#) [math](#) [linear-algebra](#)
<https://study.bem130.com/exercise/math/linear-algebra/行列式と可逆性-基本演習/>

12 関連リンク

→ 講義 線型写像と行列 [lecture](#) [math](#) [linear-algebra](#)
<https://study.bem130.com/lecture/math/linear-algebra/線型写像と行列-講義/>

→ 講義 逆行列の基本 [lecture](#) [math](#) [linear-algebra](#)
<https://study.bem130.com/lecture/math/linear-algebra/逆行列の基本-講義/>

→ 講義 階数の基本 [lecture](#) [math](#) [linear-algebra](#)
<https://study.bem130.com/lecture/math/linear-algebra/階数の基本-講義/>

→ 講義 固有値と固有ベクトル [lecture](#) [math](#) [linear-algebra](#)
<https://study.bem130.com/lecture/math/linear-algebra/固有値と固有ベクトル-講義/>