

# 行列式の計算規則

determinant

## 1 導入

この講義で重要なのは、行列式は正方行列に対して定義され、可逆性と体積の伸縮率を判定する量であるということである。

ただし初学段階では、まず計算規則を安定させる必要がある。2×2 の公式、3×3 の計算、行基本変形と列基本変形による変化を分離して確認する。

## 2 用語と定義

行列式とは、正方行列 A に対して対応する数  $\det A$  である。2×2 行列では

$$\det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = ad - bc$$

で定義される。

## 3 方針

2×2 では対角方向の積の差として計算する。3×3 以上では、余因子展開、行基本変形、列基本変形のち、0 を作りやすい方法で三角行列へ近づける。

→ [講義 行基本変形の基本](#) [lecture](#) [math](#) [linear-algebra](#)  
<https://study.bem130.com/lecture/math/linear-algebra/行基本変形の基本-講義/>

→ [講義 列基本変形の基本](#) [lecture](#) [math](#) [linear-algebra](#)  
<https://study.bem130.com/lecture/math/linear-algebra/列基本変形の基本-講義/>

## 4 直感的な説明

行列式は、行列が空間の面積や体積をどれだけ伸縮するかを表す。値が 0 なら、面積や体積が 0 に潰れるため、情報が失われる。逆行列は存在しない。

## 5 厳密な説明

2×2 の場合、

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

に対して

$$\det A = ad - bc$$

である。3×3 の場合は、余因子展開で 2×2 の行列式へ還元できる。

行基本変形と行列式の関係は次の通りである。

- 2行を交換すると、行列式の符号が反転する。
- 1行を  $c$  倍すると、行列式も  $c$  倍される。
- ある行に他の行の定数倍を加えても、行列式は変化しない。

列基本変形でも同じ規則が成り立つ。

変形	行列式への影響
2行または2列を交換する	符号が反転する
1行または1列を $c$ 倍する	$c$ 倍される
他の行または列の定数倍を加える	変わらない

## 5.1 列操作でなぜ同じ規則になるか

行列式を列ベクトルの関数として

$$D(C_1, \dots, C_n) = \det[C_1 \ \dots \ C_n]$$

と書く。行列式は各列について線型であり、2本の列が等しいと0になる。

列の定数倍については、第  $i$  列だけに線型性を使えば

$$D(C_1, \dots, \lambda C_i, \dots, C_n) = \lambda D(C_1, \dots, C_i, \dots, C_n)$$

となる。したがって行列式は  $\lambda$  倍される。

列への加算については、

$$D(C_1, \dots, C_i + \lambda C_j, \dots, C_j, \dots, C_n) = D(C_1, \dots, C_i, \dots, C_j, \dots, C_n)$$

$$+ \lambda D(C_1, \dots, C_j, \dots, C_j, \dots, C_n)$$

である。第2項は2本の列が等しいため0になる。よって行列式は変わらない。

列の交換は、2本の列が入れ替わると向き付けられた体積の向きが反転することに対応する。代数的には、

交代性から

$$D(\dots, C_j, \dots, C_i, \dots) = -D(\dots, C_i, \dots, C_j, \dots)$$

が従う。

## 6 具体例

$$\det \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix} = 2 \cdot 3 - 1 \cdot 5 = 1$$

である。したがってこの行列は可逆である。

また

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$$

では第二行が第一行の3倍であり、

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{pmatrix} = 6 - 6 = 0$$

となる。行が一次従属であるため、面積が0に潰れる。

## 6.1 列基本変形を確認する

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

とする。列を交換すると

$$A' = \begin{pmatrix} b & a \\ d & c \end{pmatrix}$$

なので、

$$\det A' = bc - ad = -(ad - bc) = -\det A$$

となる。

第1列をλ倍すると

$$A' = \begin{pmatrix} \lambda a & b \\ \lambda c & d \end{pmatrix}$$

であり、

$$\det A' = (\lambda a)d - b(\lambda c) = \lambda(ad - bc) = \lambda \det A$$

である。

第2列に第1列のλ倍を加えると

$$A' = \begin{pmatrix} a & b + \lambda a \\ c & d + \lambda c \end{pmatrix}$$

であり、

$$\begin{aligned} \det A' &= a(d + \lambda c) - c(b + \lambda a) \\ &= ad + \lambda ac - bc - \lambda ac \\ &= ad - bc \\ &= \det A \end{aligned}$$

となる。

## 7 よくある誤解

- 行列式は任意の長方形行列に定義されるわけではない。正方形行列が対象である。
- 行列式は単なる計算公式ではない。可逆性と体積の伸縮率を表す。
- 行基本変形で行列式がどう変化するかを記録しないと、値を誤る。
- 行基本変形でも行列式を計算できるが、連立一次方程式の解を直接保つ操作ではない。

## 8 どこまで成り立つか

ここでは計算規則を中心にした。一般の  $n \times n$  行列では、行または列に関する多重線型性、交代性、 $\det I = 1$  によって特徴づけられる。

さいしゅうけい

## 9 最終形

$$\det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = ad - bc$$

$\det A \neq 0 \Rightarrow A$  は可逆

行加算・列加算では  $\det A$  は変わらない

えんしゅう

## 10 演習リンク

→ 基本演習 行列式と可逆性 [exercise](#) [math](#) [linear-algebra](#)  
<https://study.bem130.com/exercise/math/linear-algebra/行列式と可逆性-基本演習/>

かんれん

## 11 関連リンク

→ 講義 行列式 [lecture](#) [math](#) [linear-algebra](#)  
<https://study.bem130.com/lecture/math/linear-algebra/行列式-講義/>

→ 講義 列基本変形の基本 [lecture](#) [math](#) [linear-algebra](#)  
<https://study.bem130.com/lecture/math/linear-algebra/列基本変形の基本-講義/>

→ 講義 余因子展開と可逆性の判定 [lecture](#) [math](#) [linear-algebra](#)  
<https://study.bem130.com/lecture/math/linear-algebra/余因子展開と可逆性の判定-講義/>