複素内積とユニタリ行列

complex inner product　unitary matrix

1 導入

この講義で重要なのは、**複素の線型代数では、転置 A^T だけでは内積と両立しない**ということである。実数の世界では、対称行列、直交行列、転置 A^T が中心になる。一方、複素数を使うと、成分を入れ替えるだけでなく複素共役も取る必要がある。その操作が共役転置 A^* である。

→ 講義 内積空間の基本 lecture math linear-algebra
https://study.bem130.com/lecture/math/linear-algebra/内積空間の基本-講義/

→ 講義 単位行列・零行列・転置の基本 lecture math linear-algebra
https://study.bem130.com/lecture/math/linear-algebra/単位行列・零行列・転置の基本-講義/

2 用語と定義

複素内積空間とは、複素ベクトル空間に複素内積が入った空間である。

エルミート内積とは、共役対称性と半線型性を持つ複素内積である。この系列では、第 1 変数を線型、第 2 変数を共役線型とする。

$$\langle au + bv, w\rangle = a\langle u, w\rangle + b\langle v, w\rangle$$

$$\langle u, av + bw\rangle = \overline{a}\langle u, v\rangle + \overline{b}\langle u, w\rangle$$

$$\langle u, v\rangle = \overline{\langle v, u\rangle}$$

共役転置とは、複素行列 $A = (a_{ij})$ に対して、転置してから各成分の複素共役を取る操作である。

$$(A^*)_{ij} = \overline{a_{ji}}$$

随伴とは、線型写像 $T : V \to V$ に対して

$$\langle Tx, y\rangle = \langle x, T^*y\rangle$$

を満たす線型写像 T^* である。標準の複素内積を使う行列表示では、随伴は共役転置 A^* に対応する。

エルミート行列とは、

$$A^* = A$$

を満たす複素正方行列である。これは自己随伴な行列である。

ユニタリ行列とは、

$$U^*U = UU^* = I$$

を満たす複素正方行列である。

正規行列とは、

$$A^*A = AA^*$$

を満たす複素正方行列である。

3 方針

まず、複素内積では共役がどこに出るかを固定する。つぎに、共役転置 A^* が 内積 の中で何を移動しているかを確認する。そこから、ユニタリ 行列 は長さと 直交 を保存し、エルミート 行列 は 内積 と 両立する 伸縮 を 表 す、と整理する。

4 直感的な説明

複素数には大きさと位相がある。位相を持つ成分どうしを比べるには、ただ掛けるだけではなく、一方を共役にして位相差を測る必要がある。

例として $z = i$ を 考 える。もし 単純 に z^2 を長さの 2 乗 と見ると、$i^2 = -1$ になり、長さが負になる。そこで

$$z\overline{z} = |\ z\ |^2$$

を使う。複素内積で複素共役が 現 れる理由は、この 単純 な事実にある。

5 厳密な説明

5.1 1. 標準 の 複素内積

この系列では、$\mathbb{C}^n$ の 標準 の複素内積を

$$\langle x, y\rangle = \sum_{k=1}^{n} x_k \overline{y_k}$$

と置く。この規約では第 1 変数が線型である。

$$\langle ax, y\rangle = a\langle x, y\rangle$$

一方、第 2 変数では複素共役が出る。

$$\langle x, ay\rangle = \overline{a}\langle x, y\rangle$$

この規約を明示するのは、教科書によって第 2 変数を線型にする流儀もあるからである。流儀が変わると、射影係数や随伴の式で共役の位置が変わる。

5.2 2. A^* が必要になる理由

実行列では、 標準内積 に対して

$$\langle Ax, y\rangle = \langle x, A^T y\rangle$$

が成立する。複素行列では、同じ役割を果たすのは A^T ではなく A^* である。

$$\boxed{\langle Ax, y\rangle = \langle x, A^* y\rangle}$$

したがって A^* は、 内積 の中で線型写像を 左側 から右側へ移す操作として理解できる。

5.3 3. ユニタリ行列が保存するもの

$U^*U = I$ なら、任意の x, y に対して

$$\langle Ux, Uy \rangle = \langle x, U^*Uy \rangle = \langle x, y \rangle$$

である。したがってユニタリ行列は、内積、長さ、直交を保存する。

$$\| Ux \| = \| x \|, \qquad \langle x, y \rangle = 0 \Rightarrow \langle Ux, Uy \rangle = 0$$

これは実数の直交行列の複素数版である。

5.4 4. エルミート行列が意味するもの

$A^* = A$ なら

$$\langle Ax, y \rangle = \langle x, Ay \rangle$$

である。つまり、エルミート行列は内積の左右を入れ替えても同じ作用として読める行列である。この性質により、エルミート行列の固有値は実数になり、異なる固有値に属する固有ベクトルは直交する。さらに有限次元では、ユニタリ行列で対角化できる。

→ 講義 対称行列と直交対角化 lecture math linear-algebra
https://study.bem130.com/lecture/math/linear-algebra/対称行列と直交対角化-講義/

5.5 5. エルミート行列と正規行列の違い

正規行列は $A^*A = AA^*$ を満たす。これは A と A^* の作用が交換できるという条件である。エルミート行列は $A^* = A$ なので自動的に正規行列である。

種類	条件	保存・性質
ユニタリ行列	$U^*U = UU^* = I$	内積と長さを保存する
エルミート行列	$A^* = A$	自己随伴で、固有値が実数になる
正規行列	$A^*A = AA^*$	ユニタリ対角化できる

6 具体例

6.1 例 1：複素内積を計算する

$$u = \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}, \qquad v = \begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix}$$

とする。この規約では

$$\langle u, v \rangle = 1 \cdot \bar{i} + i \cdot \bar{1} = -i + i = 0$$

である。したがって u と v は直交する。ここで共役を忘れると $1 \cdot i + i \cdot 1 = 2i$ となり、直交を誤判定する。

6.2 例 2：エルミート行列を判定する

$$A = \begin{pmatrix} 2 & i \\ -i & 3 \end{pmatrix}$$

では、

$$A^* = \begin{pmatrix} 2 & i \\ -i & 3 \end{pmatrix} = A$$

である。したがって A はエルミート行列である。対角成分は実数で、非対角成分は互いに複素共役になっている。

6.3 例 3：ユニタリ行列を判定する

$$U = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix}$$

とする。このとき

$$U^* = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}$$

であり、

$$U^*U = I$$

である。したがって U はユニタリ行列である。この行列は第 2 成分の位相だけを回転し、長さは変えない。

7 判定基準

- 複素成分を含む内積では、必ず複素共役の位置を確認する。
- エルミート内積では、この系列の規約として第 1 変数が線型である。
- ユニタリ行列は内積と長さを保存する。
- エルミート行列は実対称行列の複素数版である。
- エルミート行列は正規行列であるが、正規行列がすべてエルミート行列であるわけではない。

8 どこまで成り立つか

随伴は内積に依存する。標準の複素内積を使う行列では A^* が随伴になるが、別の内積を入れた空間では、同じ成分表示の行列でも随伴の行列表示が変わることがある。

また、正規行列のユニタリ対角化は有限次元の複素内積空間で扱う主張である。実数だけで考えると、回転行列のように実固有値が足りない場合がある。

9 最終形

$$\boxed{\langle x, y\rangle = \sum_{k=1}^{n} x_k \overline{y_k}}$$

$$\boxed{(A^*)_{ij} = \overline{a_{ji}}}$$

$$\boxed{\langle Ax, y \rangle = \langle x, A^* y \rangle}$$

$$\boxed{U^* U = I \iff U \text{ はエルミート内積を保存する}}$$

$$\boxed{A^* = A \iff A \text{ はエルミート行列である}}$$

10 一言でいうと

- エルミート内積は、複素数の位相を含めて長さと直交を測るための内積である。
- ユニタリ行列は、その内積構造を壊さない複素線型変換である。

11 演習リンク

→ 基本演習 **複素内積とユニタリ行列** exercise math linear-algebra
https://study.bem130.com/exercise/math/linear-algebra/複素内積とユニタリ行列-基本演習/

12 関連リンク

→ 講義 **内積空間の基本** lecture math linear-algebra
https://study.bem130.com/lecture/math/linear-algebra/内積空間の基本-講義/

→ 講義 **単位行列・零行列・転置の基本** lecture math linear-algebra
https://study.bem130.com/lecture/math/linear-algebra/単位行列・零行列・転置の基本-講義/

→ 講義 **対称行列と直交対角化** lecture math linear-algebra
https://study.bem130.com/lecture/math/linear-algebra/対称行列と直交対角化-講義/

→ 講義 **直交化の基本** lecture math linear-algebra
https://study.bem130.com/lecture/math/linear-algebra/直交化の基本-講義/

→ 講義 **特異値分解の入口** lecture math linear-algebra
https://study.bem130.com/lecture/math/linear-algebra/特異値分解の入口-講義/