逆行列の計算手順

1 導入

この講義で重要なのは、逆行列の計算は、A を単位行列へ変形する行基本変形を、右側の I にも同時に作用させる操作であるということである。

逆行列を公式だけで処理すると、なぜ掃き出しで求まるのかが不明瞭になる。左側を I へ変形する操作の合成が、まさに A^{-1} である。

2 用語と定義

A を正方行列とする。$AA^{-1} = A^{-1}A = I$ を満たす行列 A^{-1} を逆行列という。

計算では拡大行列

$$(A \mid I)$$

を作り、行基本変形で

$$(A \mid I) \longrightarrow (I \mid A^{-1})$$

を目指す。

3 方針

A を I に変形できるかを確認する。できる場合、同じ行基本変形を I に適用した結果が A^{-1} になる。できない場合、A は可逆でない。

→ 講義 逆行列の基本 lecture math linear-algebra
https://study.bem130.com/lecture/math/linear-algebra/逆行列の基本-講義/

4 直感的な説明

行基本変形は左から可逆行列を掛ける操作に対応する。いくつかの行基本変形を合成して A が I になるなら、その合成操作を E として

$$EA = I$$

である。したがって $E = A^{-1}$ である。右側の I に同じ操作を適用すると E が現れるため、右側に A^{-1} が得られる。

5 厳密な説明

A を正方行列とする。拡大行列

$$\begin{pmatrix} A \\ I \end{pmatrix}$$

に行基本変形を施すことは、左から可逆行列を掛けることに対応する。行基本変形を合成した行列を E とすると、

$$\begin{pmatrix} A \\ I \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} EA \\ E \end{pmatrix}$$

である。もし左側を単位行列にできるなら、

$$EA = I$$

である。したがって E は A の 左逆行列 である。正方行列では、 左逆行列 が存在すれば可逆であり、$E = A^{-1}$ になる。よって

$$\begin{pmatrix} A \\ I \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} I \\ A^{-1} \end{pmatrix}$$

が正当化される。

この議論で使っている事実は、行基本変形が左から可逆行列を掛ける操作であることと、単位行列が合成しても何も変えない基準であることである。

→ 講義 行基本変形の基本 lecture math linear-algebra
https://study.bem130.com/lecture/math/linear-algebra/行基本変形の基本-講義/

→ 講義 単位行列・零行列・転置の基本 lecture math linear-algebra
https://study.bem130.com/lecture/math/linear-algebra/単位行列・零行列・転置の基本-講義/

6 具体例

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 7 \end{pmatrix}$$

とする。拡大行列を

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & 7 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

とする。第二行から第一行の 3 倍を引くと

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 1 \end{pmatrix}$$

である。さらに第一行から第二行の 2 倍を引くと

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 7 & -2 \\ 0 & 1 & -3 & 1 \end{pmatrix}$$

となる。したがって

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 7 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$$

である。

7 よくある誤解

- 逆行列は正方行列に対する両側逆である。長方行列では同じ意味の逆行列は存在しない。
- 左側だけを操作してはならない。右側の I にも同一の行基本変形を適用する。
- 途中で pivot が確保できない場合、逆行列は存在しない。

8 どこまで成り立つか

この手順は正方行列に対する逆行列の計算である。階数落ちの行列や長方行列では、擬似逆行列や最小二乗法を用いる。

9 最終形

$$\boxed{(A \mid I) \longrightarrow (I \mid A^{-1})}$$

$$\boxed{\text{左側を } I \text{ にできないなら } A^{-1} \text{ は存在しない}}$$

10 演習リンク

→ 基本演習 基本変形と連立一次方程式 exercise math linear-algebra
https://study.bem130.com/exercise/math/linear-algebra/基本変形と連立一次方程式-基本演習/

11 関連リンク

→ 講義 逆行列の基本 lecture math linear-algebra
https://study.bem130.com/lecture/math/linear-algebra/逆行列の基本-講義/

→ 講義 擬似逆行列の基本 lecture math linear-algebra
https://study.bem130.com/lecture/math/linear-algebra/擬似逆行列の基本-講義/