

連立一次方程式と拡大係数行列

system of linear equations augmented matrix

1 導入

この講義で重要なものは、連立一次方程式を、係数だけを並べた行列の問題へ変換することである。掃き出し法は、方程式そのものではなく、係数の並びを操作する方法である。そのため、まず方程式と行列の対応を固定する必要がある。

2 用語と定義

係数行列とは、連立一次方程式の左辺の係数を並べた行列である。拡大係数行列とは、係数行列に右辺の列を加えた行列である。

3 方針

$Ax = b$ の形を作ること为目标にする。A は係数行列、x は未知数ベクトル、b は右辺ベクトルである。

→ 講義 行列の基本演算 [lecture](#) [math](#) [linear-algebra](#)
<https://study.bem130.com/lecture/math/linear-algebra/行列の基本演算-講義/>

4 直感的な説明

方程式の文字を毎回記述すると、操作の本質を把握しにくい。実際に変化するものは、未知数の係数と右辺である。そこで、係数だけを抽出して表にする。拡大係数行列は、左辺の係数と右辺を同時に追跡するための表記である。

5 厳密な説明

連立一次方程式

$$\begin{cases} 2x + y = 5 \\ x - 3y = -1 \end{cases}$$

は

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \end{pmatrix}$$

と書ける。つまり

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}, \quad x = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \end{pmatrix}$$

である。拡大係数行列は

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 5 \\ 1 & -3 & -1 \end{pmatrix}$$

である。

6 具体例

$$\begin{cases} x + 2y - z = 0 \\ 3x - y + 4z = 7 \end{cases}$$

では、係数行列は

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & -1 & 4 \end{pmatrix}$$

であり、拡大係数行列は

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 3 & -1 & 4 & 7 \end{pmatrix}$$

である。未知数が3個で方程式が2本なので、 A は 2×3 行列になる。

7 よくある誤解

- 係数行列に右辺を含めない。右辺まで含めたものが拡大係数行列である。
- 未知数の順序を途中で変更してはならない。列の順序が未知数の順序を表す。
- 方程式の本数と未知数の個数は同じとは限らない。

8 どこまで成り立つか

この表記は一次方程式に対して有効である。 xy や x^2 のような非線型の項が含まれる場合、係数行列だけで同じように表現することはできない。

9 最終形

$$Ax = b$$

$(A | b)$ が拡大係数行列である

10 演習リンク

→ [基本演習 基本変形と連立一次方程式](https://study.bem130.com/exercise/math/linear-algebra/) [exercise](#) [math](#) [linear-algebra](#)
[https://study.bem130.com/exercise/math/linear-algebra/基本変形と連立一次方程式-基本演習/](https://study.bem130.com/exercise/math/linear-algebra/)

11 関連リンク

→ [講義 行基本変形の基本](https://study.bem130.com/lecture/math/linear-algebra/) [lecture](#) [math](#) [linear-algebra](#)
[https://study.bem130.com/lecture/math/linear-algebra/行基本変形の基本-講義/](https://study.bem130.com/lecture/math/linear-algebra/)

→ [講義](#) **連立一次方程式と掃き出し法** [lecture](#) [math](#) [linear-algebra](#)
<https://study.bem130.com/lecture/math/linear-algebra/連立一次方程式と掃き出し法-講義/>