

連立一次方程式と掃き出し法

system of linear equations Gaussian elimination

1 導入

この講義で最重要なのは、掃き出し法は係数をただ消去する技巧ではなく、連立一次方程式を同値な形へ変換して、解の構造を明示する方法だということである。

連立一次方程式を解くとき、代入法や加減法だけに依存すると、式が多くなった段階で構造が不明瞭になる。掃き出し法は、この手順を体系的に整理したものである。

2 用語と定義

連立一次方程式とは、未知数が1次で現れる方程式を複数まとめたものである。

行基本変形とは、行の交換、定数倍、ある行に別の行の定数倍を加える操作である。

3 方針

まず拡大係数行列に変換する。そのあと、行基本変形で前から順番に主成分を確保し、下や上の成分を消去する。

4 直感的な説明

掃き出し法は、表の中で「この列の代表はここ」と設定し、その上下を消去する操作に相当する。これを左から右へ順番に進行すると、どの変数が自由で、どの変数が決定されるかを確認できる。

5 厳密な説明

5.1 1. 拡大係数行列

たとえば

$$\begin{cases} x + y = 2 \\ 2x - y = 1 \end{cases}$$

は

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

と表示できる。

5.2 2. 行基本変形

2行目から1行目の2倍を引くと

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & -3 & -3 \end{pmatrix}$$

である。ここから $y = 1$ 、さらに $x = 1$ と判定できる。

5.3 3. 何を判定できるか

掃き出した結果、矛盾する行が出現すれば解なし、自由変数が残れば無数の解が存在する。

最小例で3つの場合を並べると、見るべき場所が明確になる。

階段形の形	読み取ること	解の型
$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	すべての未知数に pivot がある	一意解
$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	$0 = 1$ という矛盾行がある	解なし
$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	pivot のない列があり、自由変数が残る	無数の解

一意解では、各未知数が pivot によって決定される。解なしでは、係数側がすべて 0 なのに右辺だけ 0 で

ない行が現れる。無数の解では、自由変数を任意に動かせるため、解集合に自由度が残る。

6 判定基準

- 未知数が複数あり、式の数も多いなら、掃き出し法を優先する。
- 解が一意か、解なしなのかを判定したいときも、掃き出し結果が有効である。
- 変形の途中で同値を保っていることを確認する。
- 解の型を判断するときは、矛盾行、pivot の個数、自由変数の有無を順に確認する。

7 最終形

連立一次方程式 → 拡大係数行列 → 掃き出し

8 一言でいうと

- 掃き出し法は、連立一次方程式を解く手順であると同時に、解の構造を確認する方法も兼ねる。

9 演習リンク

→ [基本演習](#) [基本変形と連立一次方程式](#) [exercise](#) [math](#) [linear-algebra](#)
<https://study.bem130.com/exercise/math/linear-algebra/基本変形と連立一次方程式-基本演習/>