

階数の基本

rank

1 導入

この講義で最も重要なのは、階数は行列の中に非零の数がいくつあるかではなく、その行列が本質的に何次元ぶんの情報を保っているかを表す量だということである。

掃き出し法を手順としてのみ暗記すると、主役になる列の本数がなぜ重要かが不明瞭になる。その本数が階数であり、解の自由度、像の次元、核の次元に直結する。

2 用語と定義

階数とは、行列の独立な行または列の最大個数である。

列空間とは、列ベクトルの線型結合で得られる部分空間である。

行空間とは、行ベクトルの線型結合で得られる部分空間である。

核とは、線型写像 $A: K^n \rightarrow K^m$ について $Ax = 0$ を満たす x の集合である。

像とは、 Ax として到達できる出力全体である。

3 方針

まず掃き出し法で行列を簡約し、主成分の個数を確認する。つぎに、その数を列空間・像の次元として解釈し、核の次元と結びつける。

4 直感的な説明

2次元平面を1本の直線へつぶす写像は、2次元の情報を1次元に圧縮している。このとき階数は1である。何もつぶさず平面をそのまま平面へ送るなら階数は2である。

5 厳密な説明

5.1 1. 掃き出しで確認する

行列を行基本変形して、主成分のある行の本数を数えると、それが階数である。

5.2 2. 列の意味

列ベクトルの張る空間の次元としても階数を定義できる。 A の列を a_1, \dots, a_n とすると、

$$\text{Col}(A) = \text{span}(a_1, \dots, a_n)$$

であり、

$$\text{rank}(A) = \dim \text{Col}(A)$$

である。行空間の次元も同じ値になり、これを行階数と列階数の一致という。
 この一致は、掃き出し法から確認できる。行基本変形は左から可逆行列を掛ける操作であり、列どうしの一次関係を保存する。簡約化した行列に r 個の主成分があれば、非零行は r 本で行空間の基底を与える。また、元の行列の主成分列は列空間の基底を与える。よって行空間と列空間の次元はいずれも r である。

5.3 3. 像と核

$A: K^n \rightarrow K^m$ を線型写像として解釈すると、像は到達可能な右辺 b の全体であり、核は $Ax = 0$ に消える入力全体の集合である。

$$\text{Im}(A) = \{Ax \mid x \in K^n\}, \quad \ker(A) = \{x \in K^n \mid Ax = 0\}$$

階数は

$$\text{rank}(A) = \dim \text{Im}(A)$$

であり、核の次元を退化次数と呼ぶ。

5.4 4. 階数・退化次数定理

$A: K^n \rightarrow K^m$ について、

$$\text{rank}(A) + \text{nullity}(A) = n$$

が成立する。これは入力空間の次元が、「出力として残る次元」と「0に潰れる次元」に分解されることを意味する。

5.5 5. 解との関係

連立一次方程式 $Ax = b$ は、 b が $\text{Im}(A)$ に属する場合に解を持つ。解が1つ存在すると、他の解はその解に $\ker(A)$ の元を加えたものとして得られる。したがって核の次元が、解空間の自由度を表す。

6 判定基準

- 掃き出し結果から解の個数を判断したいなら、階数と核を確認する。
- 写像が何次元ぶん潰れているかを判定したいときにも、階数が有効である。

7 最終形

rank = 主成分の本数

rank = 独立な列の最大本数

row rank = column rank

$$\text{rank}(A) + \text{nullity}(A) = n$$

ひとこと

8 一言でいうと

- 階数は像の次元であり、核の次元と合わせて入力空間の次元を構成する。
rank image dimension kernel dimension input space dimension

えんしゅう

9 演習リンク

→ 基本演習 ベクトル空間・基底・階数 [exercise](#) [math](#) [linear-algebra](#)
<https://study.bem130.com/exercise/math/linear-algebra/ベクトル空間・基底・階数-基本演習/>

かんれん

10 関連リンク

→ 講義 連立一次方程式と掃き出し法 [lecture](#) [math](#) [linear-algebra](#)
<https://study.bem130.com/lecture/math/linear-algebra/連立一次方程式と掃き出し法-講義/>

→ 講義 線型写像と行列 [lecture](#) [math](#) [linear-algebra](#)
<https://study.bem130.com/lecture/math/linear-algebra/線型写像と行列-講義/>

→ 講義 逆行列の基本 [lecture](#) [math](#) [linear-algebra](#)
<https://study.bem130.com/lecture/math/linear-algebra/逆行列の基本-講義/>