

階段形と簡約階段形

row echelon form reduced row echelon form

1 導入

この講義で重要なのは、階段形は解を読むために行列を整理した形であり、pivot が本質的な変数と階数
を示すということである。

掃き出し法では、行列をただ小さくするのではなく、主成分の位置を段階的に整理する。その整理後の形
が階段形である。

2 用語と定義

主成分とは、各行で左から最初に現れる非零成分である。

行階段形とは、下の行へ進むほど主成分が右へ移動し、零行が下に集まる形である。

簡約行階段形とは、各主成分が1で、その列の他の成分がすべて0になった形である。

3 方針

行基本変形で左下から非零成分を消去し、主成分を階段状に配置する。解を完全に読むなら、さらに
主成分列の上下を0にして簡約する。

→ [講義 行基本変形の基本](#) [lecture](#) [math](#) [linear-algebra](#)
<https://study.bem130.com/lecture/math/linear-algebra/行基本変形の基本-講義/>

4 直感的な説明

階段形では、主役になる変数が左から右へ順に現れる。pivot がある列は主変数の列であり、pivot が
ない列は自由変数の列になる。

このため、階段形は計算途中の形であると同時に、解の自由度を確認する表としても機能する。
線型変換として見ると、pivot は「入力方向のうち、出力側で独立に効いている方向」を示す印である。

pivot のない列は、他の pivot 列の組み合わせで説明できる方向であり、そこに自由度が残る。
したがって階段形は、行列を見やすくする表計算ではなく、写像がどの方向を独立に保ち、どの方向を他
の方向へ従属させるかを読むための形である。

→ [講義 階数の基本](#) [lecture](#) [math](#) [linear-algebra](#)
<https://study.bem130.com/lecture/math/linear-algebra/階数の基本-講義/>

5 厳密な説明

たとえば

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

は行階段形である。主成分は1列目と2列目にあるため、pivotの個数は2である。したがって階数は2である。

簡約行階段形では、さらに主成分列の他成分を0にする。たとえば

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -6 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

は簡約行階段形である。

6 具体例と矛盾の判定

拡大係数行列
augmented matrix

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

は階段形である。第二行から $y = 1$ を得る。第一行へ代入して $x + 2 = 5$ 、すなわち $x = 3$ を得る。階段形は下から上へ解を戻す形である。

拡大係数行列では、最後の列だけに pivot が立つ場合に注意する。たとえば

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

には行 $0x + 0y = 1$ が含まれる。これは $0 = 1$ という矛盾なので、解は存在しない。階数で言えば、係数行列の階数は1だが、拡大係数行列の階数は2であり、

$$\text{rank}(A) < \text{rank}(A | b)$$

となる。この不一致が、右辺 b が列空間に入っていないことを表す。

7 よくある誤解

- pivot は任意の非零成分でよいわけではない。各行の左から最初の非零成分である。
- 階段形と簡約階段形は同一ではない。簡約では pivot 列の他成分も0にする。
- 階数は非零成分の個数ではなく、pivot の個数である。

8 どこまで成り立つか

行基本変形で得られる階段形は一意とは限らない。しかし簡約行階段形は一意である。階数や pivot の個数は、途中の操作の選択に依存しない。

さいしゅうけい

9 最終形

rank = pivot の個数

pivot のない列が自由変数を与える

えんしゅう

10 演習リンク

→ 基本演習 基本変形と連立一次方程式 [exercise](#) [math](#) [linear-algebra](#)
<https://study.bem130.com/exercise/math/linear-algebra/基本変形と連立一次方程式-基本演習/>

かんれん

11 関連リンク

→ 講義 連立一次方程式と掃き出し法 [lecture](#) [math](#) [linear-algebra](#)
<https://study.bem130.com/lecture/math/linear-algebra/連立一次方程式と掃き出し法-講義/>

→ 講義 階数の基本 [lecture](#) [math](#) [linear-algebra](#)
<https://study.bem130.com/lecture/math/linear-algebra/階数の基本-講義/>