

# 多重積分と変数変換

## 1 導入

このページの核心は、多重積分を面積や体積の公式ではなく、領域を小部分へ分割して量を総和する操作として確認することである。

## 2 用語と定義

二重積分は、平面領域  $D$  上の量を  $\iint_D f(x,y) dA$  として足し合わせる操作である。  
変数変換は、領域を別座標で記述し、Jacobian 行列式で面積要素や体積要素を補正する方法である。

## 3 方針

直交座標で領域が複雑なら、極座標・円柱座標・球座標を検討する。重要なのは、座標の変更により積分領域が単純化されるかである。

## 4 厳密な説明

極座標では

$$x = r \cos \theta, \quad y = r \sin \theta$$

であり、面積要素は  $dA = r dr d\theta$  となる。これは小長方形が写像により面積倍率  $r$  を受けることを意味する。

## 5 具体例

半径 1 の円板  $D$  で  $f(x,y) = 1$  とすると、

$$\iint_D 1 dA = \int_0^{2\pi} \int_0^1 r dr d\theta = \pi$$

である。Jacobian の補正  $r$  を省略すると面積を誤る。

## 6 よくある誤り

- 座標変換だけを代入し、Jacobian 行列式を省略する。
- 積分範囲を図形と対応させずに設定する。
- 順序交換の前に領域を再確認しない。

## 7 かんれん 関連リンク

---

→ [講義](#) [曲線・曲面のパラメータ表示](#) [lecture](#) [math](#) [multivariable-calculus](#)  
<https://study.bem130.com/lecture/math/multivariable-calculus/曲線・曲面のパラメータ表示-講義/>