

接平面・連鎖律・Jacobian

1 導入

このページの核心は、多変数関数の微分を、一点の近傍で最良の線形近似を与える操作として確認することである。

2 用語と定義

接平面は、曲面を一点の近傍で一次式により近似する平面である。
Jacobian は、多変数写像の偏微分を行列に配置した対象である。

3 方針

$z = f(x, y)$ では、接平面が局所的な一次近似を与える。 $F: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ では、Jacobian が同じ役割を果たす。
連鎖律は、一次近似の合成が行列積で表現されることを述べる。

4 厳密な説明

f が (a, b) で全微分可能なら、

$$f(x, y) \approx f(a, b) + f_x(a, b)(x - a) + f_y(a, b)(y - b)$$

である。 $F = (F_1, \dots, F_m)$ の Jacobian は

$$J_F = \left(\frac{\partial F_i}{\partial x_j} \right)$$

であり、近似式 $F(a + h) \approx F(a) + J_F(a)h$ を与える。

5 具体例

$f(x, y) = x^2 + y^2$ の $(1, 2)$ における接平面は

$$z = 5 + 2(x - 1) + 4(y - 2)$$

である。この式は曲面そのものではなく、近傍での一次近似である。

6 どこまで成り立つか

Jacobian は局所的な情報である。広い領域で一对一か、逆写像が存在するかは、追加条件を必要とする。

7 かんれん 関連リンク

→ [講義](#) 多重積分と変数変換 [lecture](#) [math](#) [multivariable-calculus](#)
<https://study.bem130.com/lecture/math/multivariable-calculus/多重積分と変数変換-講義/>